UDK 519.271

Naključni impulzni procesi

IGOR GRABEC

UVOD

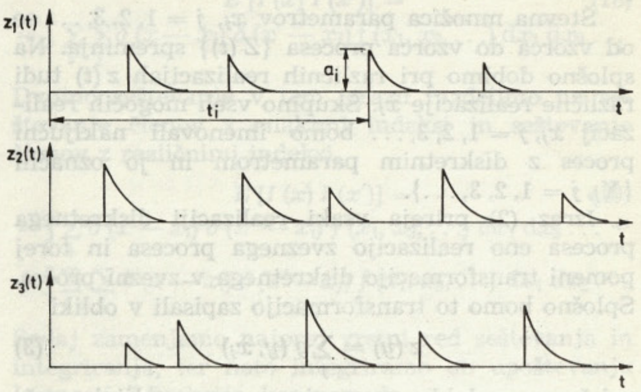
V tehniki in naravoslovju pogosto srečujemo pojave, ki so posledica števne množice naključnih dogodkov ali vzrokov. Za primer lahko navedemo obnašanje različnih tehničnih sistemov pod vplivom naključnih sunkovitih obremenitev, prenos naključnih impulznih signalov v komunikacijskih sredstvih, nastanek temperaturnih ali napetostnih polj pod vplivom naključno razmeščenih točkovnih izvorov polja in tako dalje [1]. Zaradi naključne narave moramo pri opisu navedenih pojavov uporabljati statistične metode. Pri tem se pojavlja standardno vprašanje povezave statističnega opisa vzrokov s statističnim opisom pojava, ki izhaja iz teh vzrokov. Skoraj vedno je namreč laže opisati ali določiti statistične lastnosti vzrokov kakor pa lastnosti pojava samega. Povezava obeh statističnih opisov pomeni problem, ki ga je na splošno treba rešiti za vsak primer posebej, le za pojave, ki predstavljajo obnašanje linearnih sistemov, so izdelane splošne metode povezovanja obeh opisov [2]. Kadar so vzroki sunkovite narave, je mogoče to značilnost upoštevati pri statističnem opisu precej splošno in samo po njej priti do zanimivih sklepov [1].

Namen našega članka je opozoriti predvsem eksperimentalce na posebnosti naključnih impulznih procesov. Zato bomo obravnavali najprej obnašanje linearnih sistemov pod sunkovitimi naključnimi vplivi. S tem bomo prišli do opisa naključnih sunkov brez globljega posega v teorijo impulznih procesov. Podrobneje bomo nato obravnavali le statistično neodvisne stacionarne sunke, ki niso v korelaciji, s kakršnimi se pri eksperimentalnem delu najpogosteje srečujemo.

OBNAŠANJE LINEARNEGA SISTEMA POD VPLIVOM NAKLJUČNIH SUNKOV

Zamislimo si avtomobil, ki vozi po gladki podlagi, na kateri tu in tam leži majhen kamen. Ko pripelje kolo na kamen, doživi vozilo sunek v vertikalni smeri, zaradi česar malo zaniha. Obnašanje vozila pod vplivom teh sunkov opišemo tako, da podamo odmik $z(t)$ od ravnovesne lege nad podlago. Odmik se s časom spreminja, kar smo nakazali s funkcijsko odvisnostjo spremenljivke z od parametra t. Pri različnih ponovitvah poskusa, to je pri ponovljenih vožnjah v enakih okoliščinah, dobimo na splošno različne časovne poteke odmika. Slika 1 prikazuje nekaj namišljenih posnetkov takšnega časovnega odmika.

Celotni pojav označuje skupina vseh mogočih realizacij časovnega poteka odmika $z_k(t)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, ki jo bomo imenovali naključni proces z zveznim parametrom in označili $\{Z(t)\}$. Vsak posamezni



časovni potek iz procesa $\{Z(t)\}$ pomeni odziv sistema na števno množico sunkov — impulzov. V prihodnje bomo pri vsakem izbranem vzorcu procesa impulze oštevilčili. Pri j-tem sunku bomo označili čas nastopa s t_j, njegovo amplitudo pa z a_j. Oštevilčenje izvedemo navadno tako, da je $t_j < t_{j+1}$, vendar to ni nujno in v naši obravnavi ne bo pogoj.

Dinamične lastnosti sistema opišemo s tem, da povemo, kako se sistem odzove pri času t na sunek z amplitudo enote in časom nastanka t'. Naj nam tak odziv popiše funkcija $h(t, t')$. Privzeli bomo, da je sistem linearen, kar pomeni, da se pri a-kratnem povečanju amplitude sunka prav tolikokrat poveča tudi odziv, ter da je odziv na serijo sunkov enak vsoti odzivov na posamezne sunke. Zato lahko ob naši predpostavki zapišemo

$$z(t) = \sum_j a_j\, h(t, t_j) \quad (1)$$

S tem izrazom ne moremo opisati obnašanja nelinearnega sistema, na primer takšnega, pri katerem je odziv odvisen od kvadrata amplitude sunka.

Zaradi preglednosti zapisa je ugodno označiti posamezni sunek z enim samim simbolom $x_j = (a_j, t_j)$, ki pomeni dvokomponentno veličino. Če vpeljemo še označbo $a_j\, h(t, t_j) = g(t, x_j)$, lahko izraz (1) zapišemo v obliki

$$z(t) = \sum_j g(t, x_j) \quad (2)$$

Pri izpeljavi tega izraza smo upoštevali samo linearnost sistema in diskretnost vzbuditve, zaradi tega ga lahko na splošno uporabljamo za opis obnašanja linearnih sistemov pod sunkovitimi vplivi. Primeren je tudi za opis polj, ki izvirajo iz naključnih točkovnih izvorov le da moramo v tem primeru nadomestiti parameter t z večdimenzionalnim, ki ga bomo označili z y. Poleg tega lahko uporabnost izraza (2) razširimo na impulzne procese, pri katerih se impulzi medsebojno razlikujejo tudi po obliki in ne samo po amplitudi ter kraju ali času nastanka.

V ta namen vzamemo, da lahko s parametrom x_j opišemo tudi funkcijsko obliko odziva na j-ti sunek, seveda pa se s tem dimenzija parametra x_j poveča.

Števna množica parametrov x_j, $j = 1, 2, 3, \ldots$ se od vzorca do vzorca procesa $\{Z(t)\}$ spreminja. Na splošno dobimo pri različnih realizacijah $z(t)$ tudi različne realizacije x_j. Skupino vseh mogočih realizacij $x_j, j = 1, 2, 3, \ldots$ bomo imenovali naključni proces z diskretnim parametrom in jo označili $\{X_j, j = 1, 2, 3, \ldots\}$.

Izraz (2) prireja vsaki realizaciji diskretnega procesa eno realizacijo zveznega procesa in torej pomeni transformacijo diskretnega v zvezni proces. Splošno bomo to transformacijo zapisali v obliki

$$z(y) = \sum_j g(y, x_j) \tag{3}$$

pri čemer so lahko vse zapisane spremenljivke večdimenzionalne, dimenziji zveznega in diskretnega parametra pa se lahko razlikujeta.

V nadaljnji obravnavi se bo izkazalo, da je prikladno obravnavati tudi vzbujanje kot zvezni proces. V ta namen moramo vsak posamezni sunek prikazati kot funkcijo zveznega parametra. To dosežemo z vpeljavo impulzne funkcije, $\delta(x - x_j)$, ki opiše sunek s parametrom x_j. Njene lastnosti opredelimo posredno z integralom po poljubnem področju A:

$$\int_A \delta(x - x_j)\, dx = \begin{cases} 1 & \text{za } x_j \text{ znotraj področja } A \\ 0 & \text{za } x_j \text{ zunaj področja } A \end{cases} \tag{4}$$

Ob upoštevanju teh lastnosti dobimo izraz

$$g(y, x_j) = \int g(y, x)\, \delta(x - x_j)\, dx \tag{5}$$

v katerem smo nakazali integracijo po vsem definicijskem območju parametra x. Za to območje bomo brez škode za splošnost obravnave vzeli, da v nobeni smeri ni omejeno. Z enačbo (5) lahko izraz (3) zapišemo v obliki

$$z(y) = \int g(y, x)\, I(x)\, dx = \int g(y, x)\, dN(x) \tag{6}$$

pri čemer smo zamenjali vrstni red integriranja in seštevanja in vpeljali označbo

$$dN(x) = I(x)\, dx = \sum_j \delta(x - x_j)\, dx \tag{7}$$

Za vpeljani spremenljivki $N(x)$ in $I(x)$ lahko podamo nazorno predstavo, če integriramo izraz (7) po poljubnem področju A. Po integraciji dobimo na desni strani izraza enko za vsak x_j znotraj področja A. S seštevanjem dobimo število vseh sunkov v področju A. $dN(x)$ lahko zato obravnavamo kot število sunkov s parametri znotraj infinitezimalnega področja okoli x. Spremenljivko $I(x) = \sum_j \delta(x - x_j)$ pa lahko obravnavamo kot gostoto oziroma intenzivnost sunkov pri vrednosti parametra x.

Pri različnih realizacijah naključnega procesa $\{X_j, j = 1, 2, \ldots\}$ dobimo na splošno različne realizacije gostote sunkov. Zato lahko tudi gostoto obravnavamo kot naključni proces, toda z zveznim parametrom x. Prehod od procesa $\{X_j\}$, ki označuje parametre sunkov, k procesu $\{I(x)\}$, ki označuje gostoto sunkov, podaja transformacija (7).

Naključni proces $\{Z(y)\}$ je povezan z gostoto sunkov prek transformacije (6). Funkcija $g(y, x)$ ni naključna, saj je odziv določenega sistema na impulz z določenim parametrom x, zato je naključna narava procesa $\{Z(y)\}$ samo posledica naključne narave gostote sunkov. Prav zaradi tega so statistične lastnosti gostote sunkov bistvenega pomena za popis vzbujenega linearnega sistema.

OPIS STATISTIČNIH LASTNOSTI GOSTOTE SUNKOV

Naključni proces z diskretnim parametrom $\{X_j, j = 1, 2, 3, \ldots\}$ opišemo s statističnega stališča tako, da podamo porazdelitve vseh mogočih povezanih verjetnosti naključnih spremenljivk X_j

$$F(x_1, x_2, \ldots) = P(X_1 \leqq x_1, X_2 \leqq x_2, \ldots) \tag{8}$$

Pri tem smo z znakom $P(X_1 \leqq x_1, X_2 \leqq x_2, \ldots)$ označili verjetnost, da pri realizaciji procesa $\{X_j\}$ spremenljivke $X_1, X_2, \ldots$ hkrati zavzamejo vrednosti manjše ali enake $x_1, x_2, \ldots$ Porazdelitev verjetnosti zadošča pogoju $F(\infty, \infty, \infty, \ldots) = 1$, ki pomeni verjetnost, da se pri poizkusu realizirajo realne vrednosti vseh parametrov, kar je zanesljiv dogodek.

Porazdelitveno funkcijo verjetnosti navadno izrazimo s pomočjo gostote verjetnosti takole:

$$F(x_1, x_2, \ldots) = \int_{\infty}^{x_1} \int_{\infty}^{x_2} f(x', x'', \ldots)\, dx'\, dx'' \tag{9}$$

Simbolično potem zapišemo

$$f(x_1, x_2, \ldots) = \frac{\delta F(x_1, x_2, \ldots)}{\delta x_1\, \delta x_2 \ldots} \tag{10}$$

Gostotna funkcija zadošča pogoju

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_j, \ldots, x_k)\, dx_j \ldots dx_k = 1$$

za poljubno skupino spremenljivk od j do k.

Podobno kakor diskretni proces lahko označimo tudi proces z zveznim parametrom. Za ta namen moramo najprej izbrati serijo vrednosti zveznega parametra in nato podati porazdelitve povezanih verjetnosti za vse mogoče serije.

Pri praktičnem delu se navadno odpovemo uporabi verjetnostnih porazdelitev in raje označimo statistične lastnosti pojava z raznimi poprečji. To pot uberemo zato, ker praktično ne moremo določati vseh porazdelitev povezanih verjetnosti, ki so potrebne za izčrpen popis pojava, medtem ko je razna poprečja dostikrat mogoče določati sorazmerno preprosto. Seveda se s tem odpovemo tudi izčrpnemu popisu naključnih lastnosti pojava.

Statistično poprečje poljubne funkcije Φ naključnih spremenljivk X_j definiramo z izrazom

$$E[\Phi(X_1, X_2, \ldots)] = \int \Phi(x_1, x_2, \ldots)\, dF(x_1, x_2, \ldots) = \int \Phi(x_1, x_2, \ldots)\, f(x_1, x_2, \ldots)\, dx_1\, dx_2 \ldots \quad (11)$$

Poprečje je linearna operacija, ki je po vrstnem redu zamenljiva s seštevanjem in z množenjem s konstanto, nanaša pa se samo na naključne spremenljivke.

Statistične lastnosti procesov z zveznim parametrom označujemo najpogosteje s poprečno vrednostjo in korelacijsko funkcijo. Definiramo ju z izrazoma:

$$m(y) = E[z(y)] = E\left[\int g(y, x)\, dN(x)\right] \quad (12)$$

$$R(y, y') = E[z(x)\, z(y')] = E\left[\iint g(y, x)\, g(y', x')\, dN(x)\, dN(x')\right] \quad (13)$$

Ker je operacija poprečenja linearna in se nanaša samo na naključne spremenljivke, lahko zapišemo

$$m(y) = \int g(y, x)\, E[dN(x)] = \int g(y, x)\, E[I(x)]\, dx \quad (14)$$

$$R(y, y') = \int g(y, x)\, g(y' x')\, E[dN(x)\, dN(x')] = \int g(y, x)\, g(y', x')\, E[I(x)\, I(x')]\, dx\, dx' \quad (15)$$

Izraza (14) in (15) kažeta, da je poprečna vrednost (korelacija) procesa $\{Z(y)\}$ odvisna le od poprečne vrednosti (korelacije) gostote impulzov in ne od ostalih možnih poprečij. To je hkrati posledica linearnosti operacije poprečja in linearnosti sistema, ki ga opisuje $z(y)$.

Poprečna vrednost in korelacijska funkcija gostote impulzov sta bistvenega pomena za popis lastnosti sistema pod sunkovitimi vzbuditvami in si ju bomo zato podrobneje ogledali. V ta namen poiščimo najprej zvezo med poprečno gostoto sunkov in porazdelitveno funkcijo verjetnosti procesa z diskretnim parametrom $\{X_j, j = 1, 2, 3 \ldots\}$

$$\begin{aligned} E[I(x)] &= \int I(x)\, f(x_1, x_2, \ldots)\, dx_1, dx_2 = \\ &= \int \sum_j \delta(x - x_j)\, f(x_1, x_2, \ldots)\, dx_1\, dx_2 = \\ &= \sum_j \left[\int \delta(x - x_j)\, dx_j \cdot \right. \\ &\quad \cdot \int f(x_1, x_2, \ldots)\, dx_1 \ldots dx_{j-1}\, dx_{j+1} \ldots = \\ &= \sum_j \delta(x - x_j)\, dx_j\, f(x_j) = \sum_j f(x_j = x) \end{aligned} \quad (16)$$

Pri tem smo z $f(x_j)$ označili gostoto porazdelitve verjetnosti pripadajoče parametru x_j. Zadnji izraz lahko nazorno razložimo, če ga pomnožimo z dx. Tako dobimo

$$E[I(x)]\, dx = E[dN(x)] = \sum_j f(x_j = x)\, dx = \sum_j P(x \leq X_j \leq x + dx) \quad (17)$$

Poprečno število sunkov s parametrom v okolici x je enako vsoti verjetnosti, da imajo posamezni sunki parametre v tej okolici.

Podobno kakor za poprečno vrednost lahko dobimo tudi izraz za korelacijsko funkcijo gostote sunkov

$$E[I(x)\, I(x')] = \int \sum_i \sum_j \delta(x - x_i)\, \delta(x' - x_j)\, f(x_1, x_2, \ldots)\, dx_1\, dx_2 \ldots \quad (18)$$

Dvojno seštevanje v tem izrazu razdelimo na seštevanje členov z enakimi indeksi in seštevanje členov z različnimi indeksi.

$$\begin{aligned} E[I(x)\, I(x')] &= \int \sum_i \delta(x - x_i)\, \delta(x' - x_i)\, f(x_1, x_2, \ldots)\, dx_1\, dx_2 \ldots + \\ &+ \int \sum_{i \neq j} \sum \delta(x - x_i)\, \delta(x' - x_j)\, f(x_1, x_2, \ldots)\, dx_1\, dx_2 \ldots \end{aligned} \quad (19)$$

Sedaj zamenjamo najprej vrstni red seštevanja in integriranja, ter nato integriramo ob upoštevanju lastnosti δ funkcije, kar nam da

$$\begin{aligned} E[I(x)\, I(x')] &= \sum_i \delta(x - x')\, f(x_i = x') + \\ &+ \sum_{i \neq j} \sum f(x_i = x, x_j = x') = \\ &= \delta(x - x')\, E[I(x')] + \sum_{i \neq j} \sum f(x_i = x, x_j = x') \end{aligned} \quad (20)$$

Korelacijsko funkcijo gostote sunkov sestavljata torej dva člena. Prvi doprinaša k funkciji samo pri $x = x'$ in pomeni vpliv poprečne gostote sunkov. Ta člen ni odvisen od medsebojne naključne povezanosti sunkov, temveč šele drugi, ki opiše vpliv te povezanosti na korelacijsko funkcijo gostote sunkov. Podobno kakor je poprečna gostota sunkov odvisna od verjetnostne gostote posameznih sunkov, je korelacijska funkcija gostote sunkov odvisna od gostote povezanih verjetnosti parov sunkov.

PREPROSTI MODELI NAKLJUČNIH IMPULZNIH PROCESOV

Pri praktičnem delu mnogokrat naletimo na impulzne pojave, pri katerih je poprečna gostota sunkov konstantna. Med temi pojavi sta za uporabo izredno pomembna dva značilna primera. Prvi je pojav medsebojno naključno neodvisnih sunkov. Za naključno neodvisne sunke lahko gostoto porazdelitve povezane verjetnosti dveh poljubnih parametrov izrazimo z zmnožkom verjetnostnih gostot posameznih parametrov:

$$f(x_i, x_j) = f(x_i)\, f(x_j), \text{ za poljuben par } i \neq j \quad (21)$$

V tem primeru lahko nadalje zapišemo:

$$E[I(x)] = \sum_j f(x_j = x) = I_0 \quad (22)$$

ter

$$\begin{aligned} E[I(x)\, I(x')] &= I_0\, \delta(x - x') + \\ &+ \sum_{i \neq j} \sum f(x_i = x)\, f(x_j = x') = I_0\, \delta(x - x') + \\ &+ \sum_i \sum_j f(x_i = x)\, f(x_j = x') - \\ &- \sum_i f(x_i = x)\, f(x_i = x') = I_0\, \delta(x - x') + I_o^2 \end{aligned} \quad (23)$$

V zadnji enačbi smo upoštevali, da je vpliv negativnega člena zanemarljiv v primeri s prvim, ki vsebuje δ funkcijo in drugim, ki pomeni dvojno vsoto.

Druga zanimiva vrsta so sunki, ki niso v korelaciji.
Zanje velja

$$f(x_i, x_j) = 0, \text{ za vsak par } i \neq j \tag{24}$$

in dalje

$$E[I(x)\,I(x')] = \delta(x - x')\,E[I(x')] = = I_0\,\delta(x - x') \tag{25}$$

V prvem in v zadnjem primeru je edini parameter, ki ga potrebujemo za opis naključnih lastnosti pojava, poprečna gostota sunkov. V obeh primerih je ta gostota konstantna, korelacijska funkcija gostote sunkov pa odvisna le od razlike $x - x'$, zato imenujemo oba procesa stacionarna v širšem pomenu.

Stacionarnost se prenaša vselej tudi na odziv linearnega sistema, kadar lahko odzivno funkcijo zapišemo v obliki:

$$g(y, x) = g(y - x) \tag{26}$$

Za tak primer linearnega sistema imamo nadalje

$$m(y) = \int g(y - x)\,E[I(x)]\,dx = = I_0 \int g(y - x)\,dx \tag{27}$$

Če vpeljemo v ta integral novo spremenljivko, dobimo

$$m(y) = I_0 \int g(t)\,dt = \text{konstanta} \tag{28}$$

Integracija v zadnjem integralu teče po vsem definicijskem območju funkcije $g(t)$.
Podobno dobimo ob upoštevanju lastnosti δ funkcije in zamenjavi spremenljivk v integralih izraz za korelacijsko funkcijo odziva na statistično neodvisne sunke

$$R(y, y') = I_0 \int g(t)\,g(y' - y + t)\,dt + + I_0^2 \left(\int g(t)\,dt\right)^2 \tag{29}$$

Zadnji člen odpade v primeru sunkov, ki niso v korelaciji.

Izraza (28) in (29) kažeta, da je poprečna vrednost odziva izbranega linearnega sistema konstantna, njegova korelacijska funkcija pa odvisna samo od razlike $y - y'$, kar pomeni, da je odziv resnično stacionaren v širšem pomenu.

Omenimo sedaj še, kako eksperimentalno ocenjujemo poprečno gostoto sunkov pri stacionarnem impulznem procesu. V ta namen definiramo spremenljivko, ki pomeni oceno gostote:

$$\bar{I} = \lim_{A \to \infty} \frac{1}{A} \int_A dN(x) = \lim_{A \to \infty} \frac{N(A)}{A} \tag{30}$$

Pri tem smo z A označili velikost področja, po katerem seštevamo sunke, in z $N(A)$ število sunkov v tem področju. Spremenljivka $\bar{I}$ ima na splošno od vzorca do vzorca procesa različno vrednost, njeno statistično poprečje pa se ujema s poprečno gostoto sunkov:

$$E[\bar{I}] = \lim_{A \to \infty} \frac{1}{A} \int_A E[dN(x)] = \lim_{A \to \infty} \frac{1}{A} \int_A I_0\,dx = I_0 \tag{31}$$

Pri stacionarnem impulznem procesu je smiselno vpeljati tudi srednjo velikost področja pripadajočega posameznemu impulzu v neskončni seriji. Definiramo jo z izrazom

$$A_1 = \lim_{N \to \infty} \frac{A}{N(A)} = \frac{1}{\lim\limits_{A \to \infty} \frac{N(A)}{A}} = \frac{1}{\bar{I}} \tag{32}$$

pri čemer vzamemo, da je ta vrednost končna. Izraz (32) nam kaže, da obstaja enolična zveza med oceno poprečne gostote sunkov in srednjo velikostjo območja pripadajočega enemu sunku. Obe vrednosti zato tudi uporabljamo enakovredno. Seveda veljajo navedeni sklepi le za stacionarne procese.

Sklep

Mnogo tehnično pomembnih naključnih procesov je mogoče približno ponazoriti z modelom stacionarnih sunkov, ki so medsebojno naključno neodvisni ali niso v korelaciji. Uporaba teh modelov je toliko bolj vabljiva, ker je opis njihovih naključnih lastnosti sorazmerno preprost. Edini parameter, ki ga za to potrebujemo, je poprečna gostota sunkov, le-to pa lahko večinoma brez težav določamo eksperimentalno. Teže je opravičiti uporabo omenjenih modelov. Mnogokrat najdemo opravičilo za ta korak, če poznamo pojave, ki povzročajo impulzni proces. Tudi eksperimentalno je težavno, če ne celo nemogoče, preveriti uporabnost modela. V ta namen bi morali izmeriti porazdelitvene funkcije verjetnosti, pripadajoče posameznim sunkom in parom sunkov, ter jih nato primerno sešteti. Ta pot je praktično neuporabna. Laže je preverjati stacionarnost poprečne gostote sunkov in obliko korelacijske funkcije. Ujemanje le-teh s teoretično napovedanimi nam sicer pove, da uporabljani model pri prvih korakih ne vodi do napačnih rezultatov, vendar to še ne pomeni, da je pojav z uporabljenim modelom do potankosti dobro opisan. O tem bi odločale še korelacije višjih redov, ki pa jih v tehniški praksi le redko uporabljamo.

LITERATURA

[1] E. Parzen, Stochastic processes, Holden Day, San Francisco, 1962.

[2] Y. W. Lee, Statistical Theory of Communication, John Wiley & Sons INC, New York, 1960.

Avtorjev naslov:
dr. Igor Grabec, dipl. fiz.
Fakulteta za strojništvo,
Univerze v Ljubljani