

Izbočitev krožnega kolobarja v elasto-plastičnem področju: elastičen linearno utrjevalni reološki model

Buckling of a Circular Annular Plate in the Elastic-Plastic Region: an Elastic Linear Hardening Rheological Model

Boštjan Bremec - Franc Kosel

V prispevku obravnavamo stabilnostni problem krožne plošče - kolobarja, pri čemer se nestabilno stanje in potek izbočitve pojavi v trenutku, ko je napetostno stanje v najbolj obremenjenih točkah plošče že v elasto-plastičnem področju. Obravnavani so primeri, pri katerih so obremenitev, napetostno stanje ter način podprtja plošče osnosimetrični. Zunanji in notranji rob kolobarja sta lahko poljubno podprta (togo ali členkasto) ali prosto ter obremenjeno z nespremenljivima zveznima obremenitvama p_n in p_z v poljubnem medsebojnem razmerju. Z uporabo ravnotežne metode so izračunane kritične obremenitve za različna razmerja notranjega in zunanjega polmera a/b . Pri tem je upoštevano, da se plošča lahko izboči osnosimetrično (kupolasto $m=0$) ali pa osnonesimetrično z $m>0$ valovi v obodni smeri. V rezultatih je prikazan vpliv stopnje utrjevanja materiala f na kritično zunanjo obremenitev. Podana je primerjava med rezultati, dobljenimi na podlagi upoštevanja končnih ter diferencialnih napetostno-deformacijskih zvez.

© 2001 Strojniški vestnik. Vse pravice pridržane.

(Ključne besede: kolobarji krožni, procesi izbočitve, področja elasto-plastična, modeli reološki)

This paper treats the buckling problem of a circular annular plate where the unstable state and the buckling process occur when the stress state at the most loaded points of the plate is already in the elastic-plastic region. We analysed the cases with axisymmetric loads, the stress state and the supports of the plate. The outer and inner edges of the annulus were supported (clamped or simply supported) or free, and loaded with constant pressures p_n and p_z in an arbitrary ratio. With the use of the equilibrium method the buckling loads were calculated for different ratios of the inner and outer radii a/b . It is supposed that the plate buckles axisymmetrically (spherically $m=0$) or non-axisymmetrically with $m>0$ waves in the circumferential direction. The results show the influence of the material-hardening coefficient f on the buckling load. A comparison between calculations with a consideration of finite and incremental stress-strain relations is given.

© 2001 Journal of Mechanical Engineering. All rights reserved.

(Keywords: circular annular plates, buckling processes, elastic-plastic regions, rheological models)

0 UVOD

Vse teorije, ki obravnavajo začetno stabilnost plošč v elastičnem in elasto-plastičnem področju zahtevajo, da določimo napetostno stanje v trenutku tik preden plošča preide v nestabilno stanje in se lahko pojavi potek izbočenja. Izbočitev v elasto-plastičnem področju se pojavi pri ploščah, ki so primerno toge, tako da je napetostno stanje v trenutku izbočitve že v elasto-plastičnem področju. Zaradi soodvisnosti kritične obremenitve od funkcije napetosti je, v takšnih primerih zaradi zahtevnosti problema, primerno uporabiti iterativni postopek reševanja. Nasprotno je pri obravnavanju stabilnosti v elastičnem področju zveza med napetostnim stanjem in obremenitvijo plošče linearna, zato je določanje kritične obremenitve preprostejše in hitrejše ([1] do [5]).

0 INTRODUCTION

All theories dealing with the initial stability of plates in the elastic and in the elastic-plastic regions demand knowledge of the stress state at the moment before the plate goes into an unstable state and starts to buckle. The problem of buckling in the elastic-plastic region arises with plates that are sufficiently stiff for the stress state at the moment of buckling to already be in the elastic-plastic region. Because of the complexity of this problem, which is caused by the interdependence of the buckling load and the stress function in such cases, an iterative procedure needs to be adopted. In contrast, when dealing with the buckling of plates in the elastic region the relationship between the stress function and the load on the plate is linear, and this makes the calculation of the buckling load easier and quicker, [1] to [5].

1 STABILNOST PLOŠČ V ELASTO-PLASTIČNEM PODROČJU

Pri obravnavanju problema bomo upoštevali naslednje predpostavke:

- material je homogen in izotropen tako v elastičnem kakor tudi v plastičnem področju,
- pred pojavom nestabilnosti je v plošči ravninsko napetostno stanje,
- velja Kirchofova upogibna teorija,
- kritično obremenitev določimo s Shanleyevo hipotezo [6], ki predpostavlja, da je v začetni fazi izbočitve celoten prečni prerez plošče v plastičnem območju,
- celotne deformacije so sestavljene iz elastičnih in plastičnih, ki so istega velikostnega razreda, sprememba prostornine v plastičnem območju je posledica le elastičnega dela deformacij, velja Misesov pogoj tečenja,
- upoštevamo teorijo drugega reda po Chwalli.

Vzemimo, da poznamo pred izgubo stabilnosti v poljubni točki plošče ravninsko napetostno stanje σ_{ij} ter temu ustrezno deformacijsko stanje ε_{ij} , kjer sta σ_{ij} in ε_{ij} kartezična tenzorja. Diferencialno enačbo za določitev nestabilnega stanja določimo po teoriji drugega reda z momentnim ravnotežnim stanjem na plošči z elementarno deformacijo. Pri prehodu iz osnovnega v novo ravnotežno stanje dobijo prvotne deformacije ε_{ij} v novi legi neskončno majhne prirastke $\delta\varepsilon_{ij}$, ki jih, upoštevajoč Kirchofovo upogibno teorijo, zapišemo v naslednji obliki:

$$\delta\varepsilon_{ij} = E_{ij} - zw_{,ij} \quad (1)$$

Pri tem smo z w označili elementarno majhen premik osrednje ravnine plošče iz prvotne lege, z pomeni oddaljenost od osrednje ravnine plošče, E_{ij} pa so neskončno majhni prirastki tenzorja deformacij osrednje ravnine plošče. Prirastkom tenzorja deformacij $\delta\varepsilon_{ij}$ ustrezajo prirastki tenzorja napetostnega stanja $\delta\sigma_{ij}$. Medsebojno odvisnost pomenijo napetostno-deformacijske zveze, ki jih splošno lahko zapišemo:

$$\delta\varepsilon_{ij} = b_{ijmn} \delta\sigma_{mn} \quad (2)$$

kjer je b_{ijmn} tenzor mehanskih lastnosti materiala. Z obrnitvijo enačbe (2) izrazimo prirastke tenzorja napetostnega stanja $\delta\sigma_{ij}$ s prirastki tenzorja deformacij $\delta\varepsilon_{ij}$:

$$\delta\sigma_{ij} = \bar{a}_{ijmn} \delta\varepsilon_{mn} \quad (3)$$

Prirastke tenzorja napetosti $\delta\sigma_{ij}$ izrazimo z ukrivljenostmi $w_{,ij}$. Glede na Shanleyevo hipotezo [6], ki predpostavi, da je v začetni fazi izbočitve celoten prečni prerez plošče v plastičnem področju in tako ne upošteva učinkov razbremenitve, veljajo

1 THE BUCKLING OF PLATES IN THE ELASTIC-PLASTIC REGION

The following assumptions will be made:

- the material is homogeneous and isotropic in the elastic and plastic region;
- before the buckling process the plate is in a plane stress state;
- Kirchof's bending theory is accepted;
- the buckling load is determined using Shanley's hypothesis [6], which supposes that at the onset of buckling the whole cross-section of the plate is in the plastic region;
- the total strain is made up of the elastic and plastic strains of the same magnitude;
- the change of volume in the plastic region is only caused by the elastic part of the deformations, the Mises's yield criterion is used,
- Chwalla's second-order theory is adopted.

Let us suppose that the stress state σ_{ij} and the resulting strain state ε_{ij} are known at the onset of buckling, where σ_{ij} and ε_{ij} are Cartesian tensors. The differential equation, from which the unstable state of the plate is obtained, is determined on the basis of the second-order theory with a moment equilibrium state on a plate with an elementary displacement. When the plate passes from the basic into the new equilibrium state the primary strains ε_{ij} acquire infinitesimal increments $\delta\varepsilon_{ij}$ in the new position, which can be expressed using Kirchof's bending theory in the following form:

Where w denotes the elementary small displacement of the middle plane of the plate from the basic position, z denotes the distance from the middle plane and E_{ij} are the infinitesimal increments of the strain tensor of the middle plane of the plate. The stress-tensor increments $\delta\sigma_{ij}$ correspond to the strain-tensor increments $\delta\varepsilon_{ij}$. These are related by the stress-strain relations, which can in general be written as:

where b_{ijmn} is the tensor of the mechanical properties of the material. By inverting equation (2) the stress-tensor increments $\delta\sigma_{ij}$ are expressed with strain-tensor increments $\delta\varepsilon_{ij}$:

The stress-tensor increments $\delta\sigma_{ij}$ are expressed with curvatures $w_{,ij}$. According to Shanley's hypothesis [6], which supposes that in the initial phase of buckling the whole cross-section of the plate is in the plastic region and does not consider the effects of unloading, the

enačbe za prirastke napetosti po celotni debelini plošče. Z integracijo prirastkov tenzorja napetosti $\delta\sigma_{ij}$ po debelini plošče dobimo prirastke enotskih momentov δm_{ij} . Novo stanje na deformirani plošči je ravnotežno, izpolnjena mora biti momentna ravnotežna enačba sil v smeri pravokotno na osrednjo ravnino plošče:

$$\delta m_{ij,ij} + h \sigma_{ij} w_{,ij} = 0 \quad (4).$$

Diferencialno enačbo, ki je namenjena za določanje kritične obremenitve plošče, dobimo tako, da v enačbo (4) vstavimo izraze za prirastke enotskih momentov:

$$-\left(D a_{ijmn} w_{,mn}\right)_{,ij} + p \left(h \frac{\sigma_{ij}}{p} w_{,ij} \right) = 0 \quad (5).$$

Pri tem smo v enačbi (5) z D označili upogibno togost plošče, s p pa zunanjo obremenitev plošče. Enačba je homogena linearna parcialna diferencialna enačba četrtega reda s spremenljivimi koeficienti. V splošnem so upogibna togost D in elementi tenzorja mehanskih lastnosti materiala a_{ijmn} funkcije kraja. Rešitev mora upoštevati robne pogoje podprtja plošče. Ti se nanašajo na pomik roba w , prirastek enotskega upogibnega momenta δm_n in reducirane prečne sile δq_n , kjer n pomeni normalo na rob plošče. Ker so tudi robni pogoji homogeni, nas reševanje problema vodi k določanju lastnih vrednosti homogene diferencialne enačbe (5), katere reševanje v sklenjeni obliki je verjetno v splošnem skoraj nemogoče. V našem primeru uporabimo za reševanje metodo končnih razlik, ki je opisana v nadaljevanju.

2 DOLOČANJE ELEMENTOV TENZORJA MEHANSKIH LASTNOSTI MATERIALA a_{ijmn}

Elemente tenzorja mehanskih lastnosti materiala a_{ijmn} določimo na dva načina, in sicer po teoriji končnih napetostno deformacijskih zvez na podlagi Henckyevih enačb ali pa po teoriji diferencialnih napetostno deformacijskih zvez na podlagi Reuss-Prandtlovih enačb. Modula E_t^0 (6) in E_s^0 (7) sta določena po enoosnem nateznem preskusu, kjer sta σ natezna ali tlačna napetost, ε pa ustrezna deformacija v vzdolžni smeri:

- tangentni modul

$$E_t^0 = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad (6)$$

- sekantni modul

$$E_s^0 = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (7).$$

V primeru ravninskega napetostnega stanja je zveza med enoosnim preskusom in ravninskim

equations are valid for the whole plate thickness. By integration of the stress-tensor increments $\delta\sigma_{ij}$ through the plate thickness the increments of the unit moments δm_{ij} are obtained. The new state on the deformed plate is an equilibrium state, the moment equilibrium equation of forces in the direction perpendicular to the middle plane of the plate must be fulfilled:

The governing differential equation, which is used to calculate the buckling load, is obtained by substituting the unit moments in equation (4):

In equation (5) D denotes the flexural rigidity of the plate and p denotes the outer load of the plate. Equation (5) is a homogeneous linear partial differential equation of the fourth order with variable coefficients. In general, the flexural rigidity D and the coefficients a_{ijmn} are functions of position. The solution of the differential equation must consider the boundary conditions of the supports of the plate. These are related to the displacement of the edge w , the increment of the unit bending moment δm_n and the reduced unit shear force δq_n , where n denotes the direction normal to the edge of the plate. Because the boundary conditions are homogeneous, the solution of the problem leads to the determination of the eigenvalues of a homogeneous differential equation (5), which probably cannot be solved analytically for a general case. For this reason a numerical finite-difference method, described below, was used in our study.

2 DETERMINATION OF THE TENSOR OF THE MECHANICAL PROPERTIES OF THE MATERIAL a_{ijmn}

The elements of the tensor of the mechanical properties of the material a_{ijmn} are determined in two ways: using the theory of finite stress-strain relations based on Hencky's equations or using the theory of differential stress-strain relations based on the Reuss-Prandtl equations. The modulus E_t^0 (6) and E_s^0 (7) are defined on the basis of a uniaxial tensile test, where σ is the tensile or compressive stress and ε is the resulting strain in the longitudinal direction:

- tangent modulus

In the case of a plane stress state the relation between the uniaxial test and the plane stress state is

napetostnim stanjem podana prek dejanske napetosti σ_e in dejanske specifične deformacije ε_e . Sekantni modul E_s definiramo kot razmerje med dejansko napetostjo σ_e in dejansko deformacijo ε_e , tangentni modul E_t pa kot razmerje prirastkov istih količin.

$$E_s = \frac{\sigma_e}{\varepsilon_e} \quad (8),$$

$$E_t = \frac{d\sigma_e}{d\varepsilon_e} \quad (9).$$

Pri tem razlikujemo med sekantnim modulom E_s^0 (7) ter modulom E_s (8). Medsebojno zvezo, dobljeno z analizo enoosnega napetostnega stanja, podaja enačba (10). Zveza med tangentnim E_t^0 (6) in modulom E_t (9) je enaka enačbi (10):

$$\frac{1}{E_s} = \frac{1}{E_s^0} - \frac{1-2\nu}{3E} \quad (10).$$

Teorija končnih napetostno-deformacijskih zvez

Elemente tenzorja mehanskih lastnosti materiala b_{ijmn} v enačbi (2) določimo z variiranjem napetostno-deformacijskih zvez, pri čemer dobimo:

$$b_{ijmn} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{mn}} = \left(\frac{1+\nu}{E} + \frac{3}{2E_p} \right) \delta_{im} \delta_{jn} + \left(-\frac{\nu}{E} - \frac{1}{2E_p} \right) \delta_{ij} \delta_{mn} + \frac{1}{\sigma_e^2} \left(\frac{1}{E_t} - \frac{1}{E_s} \right) \left(\frac{3}{2} \sigma_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right) \left(\frac{3}{2} \sigma_{mn} - \frac{1}{2} \delta_{mn} \sigma_{kk} \right) \quad (11).$$

Teorija diferencialnih napetostno-deformacijskih zvez

Elementi tenzorja mehanskih lastnosti materiala b_{ijmn} za diferencialne napetostno-deformacijske zveze so:

$$b_{ijmn} = \frac{\delta \varepsilon_{ij}}{\delta \sigma_{mn}} = \frac{1+\nu}{E} \delta_{im} \delta_{jn} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \delta_{mn} + \frac{3}{2\sigma_e^2} \left(\frac{1}{E_t} - \frac{1}{E} \right) \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right) \left(\frac{3}{2} \sigma_{mn} - \frac{1}{2} \delta_{mn} \sigma_{kk} \right) \quad (12).$$

3 IZRAČUN NAPETOSTNEGA STANJA

Napetostno stanje je opredeljeno s krožno ploščo nespremenljive debeline, ki je na zunanem in notranjem polmeru obremenjena z enakomerno zvezno obremenitvijo p_z in p_n (sl.1). Obremenitvi sta določeni z osnovno obremenitvijo p ter koeficientoma α in β :

$$p_n = p \cdot \alpha \quad (13),$$

$$p_z = p \cdot \beta \quad (14).$$

Problem rešujemo v polarnem koordinatnem sistemu $(r; \varphi)$. Zaradi obremenitve je napetostno stanje v plošči ravninsko osnosimetrično ($\sigma_{r\varphi} = 0$), kar precej poenostavi nalogo. Uporabimo numerično metodo reševanja [7], ki je zasnovana na izračunu napetostnega stanja s diferenčno metodo ter na metodi reševanja z zaporednimi približki rešitev.

given by means of the effective stress σ_e and the effective strain ε_e . The secant modulus E_s is defined as the ratio between the effective stress σ_e and the effective strain ε_e , where the tangent modulus E_t is the ratio of the increments of the same quantities.

It is necessary to distinguish between the secant modulus E_s^0 (7) and the modulus E_s (8). The relationship, obtained by the analysis of the uniaxial stress state, is given by equation (10). The relationship between the tangent E_t^0 (6) and E_t (9) is similar to equation (10):

The theory of finite stress-strain relations

The elements of the tensor b_{ijmn} in equation (2) are determined by the variation in the stress-strain relations where we obtain:

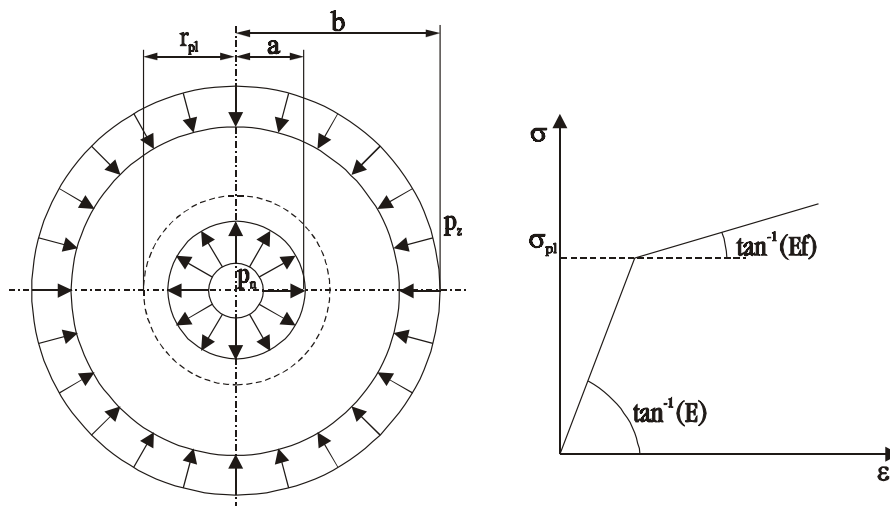
The theory of differential stress-strain relations

The elements of the tensor of the mechanical properties of the material b_{ijmn} for differential stress-strain relations are:

3 CALCULATION OF THE STRESS STATE

The case of a circular annular plate of constant thickness loaded with constant pressure on the inner radius p_n and the outer radius p_z is studied (Fig.1). The load cases of the plate are defined in terms of the basic load p and the coefficients α and β in the following way:

The problem is solved in the polar coordinate system $(r; \varphi)$. Because of the specific loading the stress state is plane axisymmetric ($\sigma_{r\varphi} = 0$), which makes the task easier. A numerical approach is used [7], which is based on the calculation of the stress state with the finite-difference method and on the method of successive approximations.



Sl. 1. Obremenitev plošče – kolobarja ter reološki model snovi
 Fig. 1. Plate loading and the stress-strain curve of the material

4 IZRAČUN KRITIČNE OBREMNITVE PLOŠČE

4 CALCULATION OF THE BUCKLING LOAD

Zaradi osnosimetrične geometrijske oblike in obremenitve plošče problem obravnavamo v polarnem koordinatnem sistemu. Pri tem je treba pri zapisu diferencialne enačbe (5) upoštevati spremembo diferencialnih operatorjev iz kartezičnega v polarni koordinatni sistem. Pri tem upoštevamo simetrijo napetostnega tenzorja $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, iz katere izhajajo $a_{rrr\varphi} = a_{rr\varphi r}$, $a_{r\varphi r\varphi} = a_{r\varphi\varphi r}$ in $a_{\varphi\varphi r\varphi} = a_{\varphi\varphi\varphi r}$. Diferencialna enačba za ploščo nespremenljive debeline (5) ima v polarnem koordinatnem sistemu naslednjo obliko:

Because of the axisymmetric geometry and the loading of the plate, the problem is solved in the polar coordinate system. For this reason the transformation of the differential operators from the Cartesian to the polar coordinate system must be considered in the notation of equation (5). The symmetry of the stress tensor $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, from which follows $a_{rrr\varphi} = a_{rr\varphi r}$, $a_{r\varphi r\varphi} = a_{r\varphi\varphi r}$ and $a_{\varphi\varphi r\varphi} = a_{\varphi\varphi\varphi r}$, is considered. The differential equation for a plate of constant thickness (5) written in the polar coordinate system has the following form:

$$\begin{aligned}
 & -\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) \left[a_{rrrr} \cdot w_{,rr} + 2 \cdot a_{rrr\varphi} \cdot \left(\frac{1}{r} w_{,r\varphi} - \frac{1}{r^2} w_{,r} \right) + a_{rr\varphi\varphi} \cdot \left(\frac{1}{r} w_{,\varphi} + \frac{1}{r^2} w_{,\varphi\varphi}\right) \right] - \\
 & -2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\right) \left[a_{r\varphi rr} \cdot w_{,rr} + 2 \cdot a_{r\varphi r\varphi} \cdot \left(\frac{1}{r} w_{,r\varphi} - \frac{1}{r^2} w_{,r} \right) + a_{r\varphi\varphi\varphi} \cdot \left(\frac{1}{r} w_{,\varphi} + \frac{1}{r^2} w_{,\varphi\varphi}\right) \right] - \\
 & -\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) \left[a_{\varphi\varphi rr} \cdot w_{,rr} + 2 \cdot a_{\varphi\varphi r\varphi} \cdot \left(\frac{1}{r} w_{,r\varphi} - \frac{1}{r^2} w_{,r} \right) + a_{\varphi\varphi\varphi\varphi} \cdot \left(\frac{1}{r} w_{,\varphi} + \frac{1}{r^2} w_{,\varphi\varphi}\right) \right] + \\
 & + \frac{p \cdot h}{D} \cdot \left(\frac{\sigma_{rr}}{p} \cdot w_{,rr} + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{p} \cdot \left(\frac{1}{r} w_{,r\varphi} - \frac{1}{r^2} w_{,r} \right) + \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{p} \cdot \left(\frac{1}{r} w_{,\varphi} + \frac{1}{r^2} w_{,\varphi\varphi}\right) \right) = 0
 \end{aligned} \tag{15}$$

Zaradi simetrije problema in ob upoštevanju predpostavke, da se plošča lahko izboči osnosimetrično $m=0$, ter osnesimetrično z $m>0$ valovi v obodni smeri, lahko problem prevedemo iz dvodimenzionalnega (r, φ) na enodimenzionalni (r) z uporabo ustrezne funkcije za upogib plošče w [9]:

Because the problem is symmetric and the plate buckles in an axisymmetric $m=0$ and non-axisymmetric mode with $m>0$ waves in the circumferential direction, a two-dimensional problem (r, φ) can be transformed to one-dimensional problem (r) by using an appropriate function for the displacements w [9]:

$$w(r, \varphi) = f(r) \cdot \cos(m \cdot \varphi) \tag{16}$$

kjer je m število valov v obodni smeri. Z nastavkom (16) preide homogena parcialna diferencialna enačba (15) v navadno homogeno diferencialno enačbo četrtega reda ene neodvisne spremenljivke:

where m is the number of waves in the circumferential direction. With function (16) the homogeneous partial differential equation (15) becomes a normal fourth-order homogeneous differential equation of a single independent variable:

$$\sum_{n=0}^{n=4} A_n(r, m) \cdot \frac{d^n f}{dr^n} + p \cdot \sum_{n=0}^{n=3} B_n(r, m) \cdot \frac{d^n f}{dr^n} = 0 \quad (17).$$

Pri tem so v enačbi (17) $A_n(r, m)$ in $B_n(r, m, p)$ pripadajoči koeficienti, ki so funkcije polmera r in izbranega števila valov m , v elasto-plastičnem področju pa tudi od obremenitve plošče p . Tudi tukaj uporabimo za reševanje enačbe (17) metodo končnih razlik. Tako dobimo z upoštevanjem robnih pogojev sistem enačb, ki ga lahko zapišemo v matrični obliki:

$$([A(m)] + p \cdot [B(m, p)]) \cdot \{f\} = 0 \quad (18).$$

Pri tem sta $[A(m)]$ in $[B(m, p)]$ pripadajoči matriki koeficientov ob vektorju neznanek $\{f\}^T = \{f_1, f_2, \dots, f_{N+1}\}$. Pogoj za netrivialno rešitev homogenega sistema linearnih enačb (18) vodi v določanje lastnih vrednosti sistema enačb. V splošnem ima tak sistem $p_n(m)$ lastnih vrednosti, kjer je $n=1, \dots, N+1$. Kritično obremenitev, kjer se pojavi labilno stanje, pomeni najmanjša realna lastna vrednost:

$$p_{cr}(m) = \min \{p_n(m), n=1, \dots, N+1\} \quad (19),$$

$$p_{cr} = \min \{p_{cr}(m), m=1, 2, \dots\} \quad (20).$$

Izračunani $p_{cr}(m)$ (19) pomeni kritično obremenitev za dani obremenitveni primer pri številu valov m . Določiti je treba število valov m , pri katerem je kritična obremenitev najmanjša. Na ta način določimo obliko, v katero se plošča izboči.

V primeru, ko je napetostno stanje v elastičnem področju, je razmerje σ_{ij}/p za celotno območje nespremenljivo, v elasto-plastičnem področju pa zaradi nelinearnosti mehanskih lastnosti materiala to ne velja več. Zaradi tega so koeficienti matrike $[B(m, p)]$ (18) odvisni od napetostnega stanja σ_{ij} oziroma obremenitve p . To zahteva iterativno reševanje. Shematičen potek reševanja prikazuje slika 2.

5 ŠTEVILČNI PRIMERI

Številčne primere smo izračunali z lastnim programom. Uporabili smo naslednje podatke: zunanji radij plošče $b=200$ mm, elastični modul materiala $E=210$ GPa, meja plastičnosti $\sigma_{pl}=210$ MPa, Poissonov količnik $\nu=0,3$. Program smo preverili z analizo nekaterih elastičnih primerov izbočitve, za katere so znani analitični rezultati [10]. Pri tem smo analizirali vpliv delitve N na natančnost rezultatov, ki je razviden iz preglednice 1. Rezultati so podani v obliki izbočitvenega koeficienta κ za primer VI načina podprtja in za obremenitveni primer $p_n=p_z=-p$. Izbočitveni koeficient κ je za ploščo nespremenljive debeline v naslednji zvezi s kritično obremenitvijo plošče p_{cr} :

In equation (17) $A_n(r, m)$ and $B_n(r, m, p)$ are the belonging coefficients, which are functions of the radii r , the selected number of waves m and, in the elastic-plastic region, also of the outer load p of the plate. The solution is obtained by the finite-differences method. Considering the boundary conditions, a system of equations is obtained what is in the matrix form:

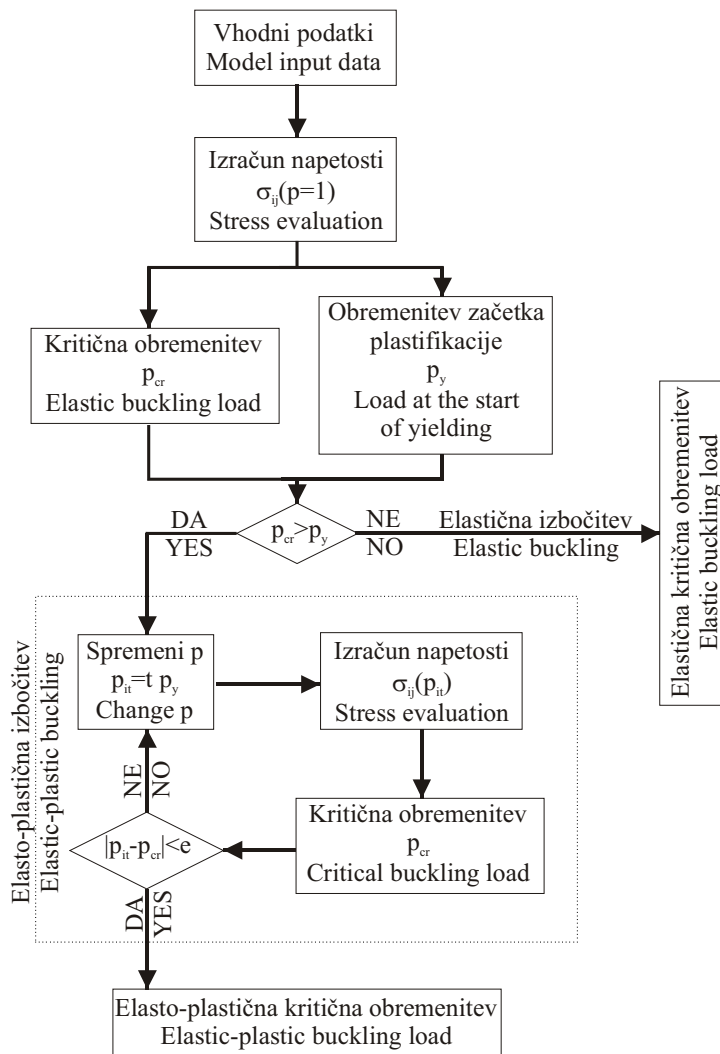
Here $[A(m)]$ and $[B(m, p)]$ are the matrices of coefficients to the vector of unknowns $\{f\}^T = \{f_1, f_2, \dots, f_{N+1}\}$. The condition for a nontrivial solution of a homogeneous system of linear equations (18) leads to the determination of the eigenvalues. In general, such a system has $p_n(m)$ eigenvalues, where $n=1, \dots, N+1$. The buckling load, where the unstable state arises, is determined by the smallest real eigenvalue:

The calculated $p_{cr}(m)$ (19) represents the buckling load for a determined load case and a number of waves m . It is necessary to determine the number of waves m , where the buckling load is the smallest. In that way the buckling shape of the plate is determined.

In cases where the stress state in the plate is within the elastic region the ratio σ_{ij}/p is constant, which is not true in the elastic-plastic region, where the mechanical properties of the material are nonlinear. For this reason the coefficients of the matrix $[B(m, p)]$ (18) are dependent on the stresses σ_{ij} and on the load p , respectively. This demands an iterative procedure for solving the problem. The procedure is schematically shown in fig. 2.

5 NUMERICAL EXAMPLES

Numerical examples were calculated with our own programme. The following data were considered: outer radius of the plate $b=200$ mm, Young modulus of the material, $E=210$ GPa; yield stress, $\sigma_{pl}=210$ MPa; Poisson's ratio, $\nu=0.3$. The program was tested with an analysis of the elastic buckling cases for which the analytical solutions are known [10]. The influence of the number of intervals N on the results was analysed and the results are shown in Table 1. The results are given in form of the buckling coefficient κ for the case of support VI and the load case $p_n=p_z=-p$. The buckling coefficient κ for a plate of constant thickness is calculated from the buckling load p_{cr} in the following way:



Sl. 2. Shematični potek izračuna kritične obremenitve
 Fig. 2. Calculation of the buckling loads

$$p_{cr} = \kappa^2 \frac{D}{hb^2} = \kappa^2 \frac{E \cdot h^2}{12b^2(1-\nu^2)} \tag{21}$$

Izkaže se, da je treba pri manjših razmerjih a/b vzeti večje število delitev N zato, da dosežemo boljše konvergenco rezultatov. Ker je čas računanja odvisen od izbranega števila delitev, lahko to ugotovitev s pridom uporabljamo v izračunih.

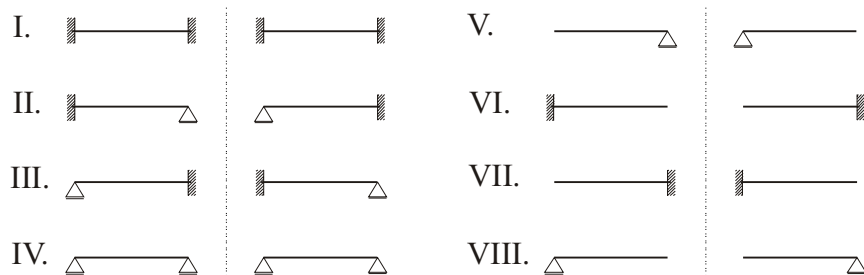
V preglednici 2 je podana primerjava rezultatov izbočitvenih koeficientov κ krožne plošče nespremenljive debeline v elastičnem področju z

It can be seen for at smaller ratio of a/b a greater number of intervals N must be taken to obtain a better convergence of the results. Because the calculation time depends on the chosen number of intervals, this is used to advantage in the calculations.

Table 2 shows the comparison between the buckling coefficients κ for a circular annular plate of constant thickness in the elastic region with analytical

Preglednica 1. Vpliv števila delitev N na konvergenco κ , $VI(\alpha=-1, \beta=-1)$
 Table 1. Influence of the number of divisions N on the convergence κ , $VI(\alpha=-1, \beta=-1)$

N	a/b								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
10	3,157	4,479	1,394	1,386	1,300	1,211	1,132	1,064	1,005
50	1,785	1,510	1,605	1,450	1,322	1,219	1,135	1,065	1,005
100	1,935	1,794	1,611	1,452	1,323	1,220	1,135	1,065	1,005
150	1,958	1,798	1,612	1,452	1,323	1,220	1,135	1,065	1,005



Sl. 3. Primeri podprtja plošče
Fig. 3. Cases of plate supports

analitičnimi za primer osnosimetričnega načina izbočenja $m=0$ [10].

Obravnavali smo osem različnih načinov podprtja plošče (sl.3), pri čemer je bila obremenitev plošče takšna, da je bilo napetostno stanje homogeno ($p_n=p_z=-p, \sigma_r=\sigma_\phi=-p$). Iz primerjave je razvidno dobro ujemanje rezultatov [10], ki so dobljeni z uporabo energijske metode reševanja.

Nadalje smo analizirali nekatere primere izbočitev v elasto-plastičnem področju. Rezultati so prikazani v odvisnosti od vitkosti plošče λ , definirane kot razmerje zunanega premera plošče $2b$ in debeline h . Mejna vitkost λ_{pl} (22), pri kateri se pojavi nestabilno stanje v elasto-plastičnem območju, določimo tako, da izenačimo obremenitev, pri kateri se prične plastifikacija s kritično obremenitvijo v elastičnem področju. Odvisna je od izbočitvenega koeficienta κ_{el} v elastičnem področju ter mehanskih lastnosti:

$$\lambda_{pl} = \frac{2b}{h_{pl}} = 2 \sqrt{\frac{\sigma_M^{\max}(p=1)}{\sigma_{pl}} \frac{E\kappa_{el}^2}{12(1-\nu^2)}} \quad (22)$$

Model preverimo tako, da rezultate kritičnih obremenitev v elasto-plastičnem področju primerjamo z rezultati v [12], kjer je obravnavana plošča nespremenljive debeline z naslednjimi številčnimi podatki, $a/b=0,2$, primer podprtja IV, obremenitveni primer pa je $p_z=-p, p_n=0$, kar ustreza $\alpha=0, \beta=-1$.

Rezultati v [12] so izračunani za idealno plastični material, ki ustreza standardu DIN 4114 z razmerjem $E/\sigma_{pl}=1000$ in $\nu=0,3$. Ker se pri idealno plastičnem materialu, $f=0$, v našem modelu pojavi singularnost $1/E_t=\infty$, izberemo zelo majhno, od nič različno stopnjo utrjevanja $f=10^{-4}$.

Primerjava je podana v preglednicah 3 in 4. Rezultati so prikazani le za primere izbočitev v elasto-plastičnem področju, ki se za obravnavani primer pojavljajo pri vitkosti $\lambda < \lambda_{pl}=128$.

Slika 4 prikazuje odvisnost kritične obremenitve p_{cr}/σ_{pl} od vitkosti plošče λ (preglednici 3 in 4), dodan pa je še diagram, ki prikazuje relativno globino plastifikacije r_{pl}/b . Vidimo, da se z zmanjševanjem vitkosti $\lambda < \lambda_{pl}$, kar dosežemo lahko s povečevanjem debeline plošče, zvečuje tudi globina plastifikacije ob izbočitvi, kritična obremenitev pa zmanjšuje. Ta znaša, ko je celotno območje plošče plastificirano ($r_{pl}=b, \lambda=66$)

for the case of axisymmetric buckling $m=0$ [10].

Eight different cases of plate supports were studied (fig.3), for each load case the resulting stress state was homogeneous ($p_n=p_z=-p, \sigma_r=\sigma_\phi=-p$). Good agreement was obtained with the results in [10], which were obtained by the energy method.

Next, some cases of elastic-plastic buckling were analysed. The results are given in terms of the slenderness of the plate λ , which is defined as the ratio between the outer diameter $2b$ and the thickness of the plate h . The limit slenderness λ_{pl} (22), where buckling in the elastic-plastic region occurs, is determined by equating the load at which the plastification starts with the buckling load in the elastic region. It depends on the buckling coefficient κ_{el} in the elastic region and on the material properties:

The model is verified so that the calculated buckling loads in the elastic-plastic region are compared with results from [12], where a constant-thickness plate is studied with the following numerical values; $a/b=0,2$, support case IV, load case $p_z=-p, p_n=0$ or $\alpha=0, \beta=-1$.

The results [12] were obtained for an ideally plastic material which meets the DIN 4114 standard with $E/\sigma_{pl}=1000$ and $\nu=0.3$. Because in the case of an ideally plastic material $f=0$, a singularity $1/E_t=\infty$ appears, a very small hardening coefficient $f=10^{-4}$ was selected.

The results are compared in tables 3 and 4 and shown only for the cases of elastic-plastic buckling which in the studied case occur at a slenderness $\lambda < \lambda_{pl}=128$.

Figure 4 shows the dependence of the buckling load p_{cr}/σ_{pl} on the slenderness λ (table 3 and 4), a diagram showing the relative depth of plastification r_{pl}/b is added. It can be seen that with a decrease of the plate slenderness $\lambda < \lambda_{pl}$, which is achieved with an increase of the thickness, the depth of plastification also increases while the buckling load is reduced. When the entire region of the plate is in the elastic-plastic

Preglednica 2. Primerjava izbočitvenih koeficientov κ za $p_n=p_z=-p$, in različna razmerja a/b Table 2. Comparison of buckling coefficients κ for $p_n=p_z=-p$ at different ratios a/b

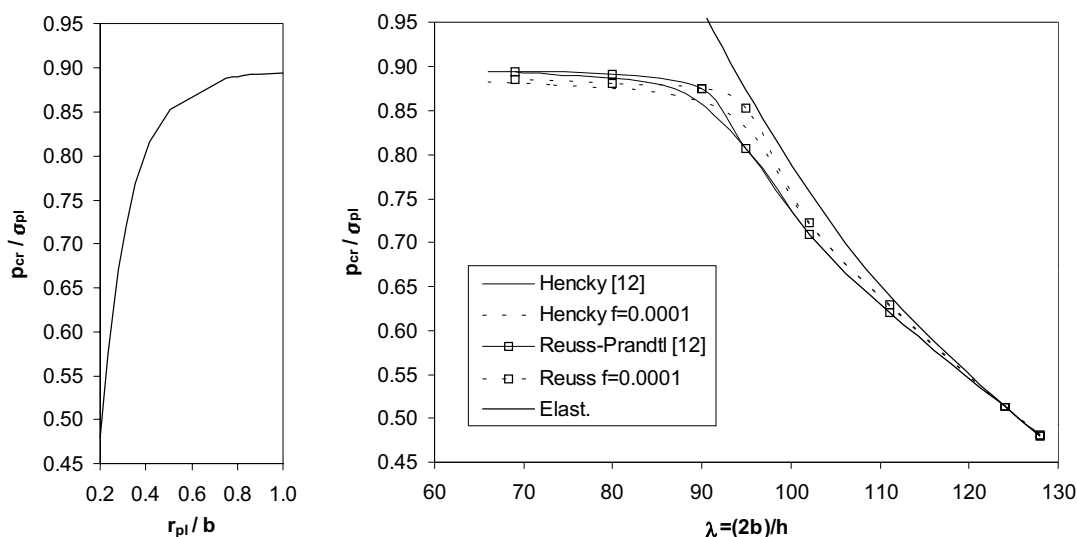
Primer Case	a/b								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
I.	7,113	7,925	9,019	10,500	12,584	15,719	20,949	31,416	62,824
I. [10]	7,110	7,920	9,010	10,490	12,580	15,710	20,940	31,400	62,790
$\Delta\%$	0,05	0,06	0,10	0,09	0,03	0,05	0,04	0,05	0,05
II.	6,306	6,476	7,058	8,001	9,415	11,603	15,303	22,757	45,195
II. [10]	6,300	6,470	7,060	8,000	9,410	11,600	15,300	22,750	45,180
$\Delta\%$	0,09	0,09	-0,03	0,01	0,06	0,03	0,02	0,03	0,03
III.	4,761	5,359	6,155	7,225	8,725	10,975	14,723	22,215	44,684
III. [10]	4,760	5,360	6,150	7,220	8,720	10,970	14,720	22,210	44,670
$\Delta\%$	0,01	-0,02	0,08	0,07	0,06	0,05	0,02	0,02	0,03
IV.	4,205	4,340	4,749	5,410	6,401	7,933	10,523	15,737	31,428
IV. [10]	4,200	4,340	4,750	5,410	6,400	7,930	10,520	15,740	31,420
$\Delta\%$	0,11	0,00	-0,02	-0,01	0,01	0,04	0,03	-0,02	0,03
V.	2,088	2,204	2,404	2,713	3,183	3,924	5,194	7,779	15,605
V. [10]	2,090	2,200	2,400	2,700	3,190	3,930	5,200	7,790	15,610
$\Delta\%$	-0,10	0,18	0,18	0,50	-0,21	-0,16	-0,11	-0,14	-0,03
VI.	1,976	1,801	1,613	1,452	1,323	1,220	1,135	1,065	1,005
VI. [10]	1,940	1,760	1,580	1,420	1,290	1,180	1,100	1,020	0,980
$\Delta\%$	1,88	2,35	2,06	2,26	2,57	3,36	3,19	4,38	2,57
VII.	3,567	3,295	3,186	3,300	3,646	4,306	5,524	8,073	15,875
VII. [10]	3,618	3,244	3,182	3,310	3,646	4,316	5,524	8,073	16,376
$\Delta\%$	-1,41	1,59	0,14	-0,33	-0,01	-0,25	-0,01	0,00	-3,06
VIII.	1,935	1,794	1,611	1,452	1,323	1,220	1,135	1,065	1,005
VIII. [10]	1,980	1,800	1,620	1,460	1,330	1,220	1,140	1,060	1,020
$\Delta\%$	-2,30	-0,32	-0,58	-0,58	-0,53	-0,03	-0,43	0,44	-1,45

Preglednica 3. Henckyeve napetostno-deformacijske zveze (IV, $a/b=0,2$, $\alpha=0$, $\beta=-1$)Table 3. Hencky's stress-strain relations (IV, $a/b=0.2$, $\alpha=0$, $\beta=-1$)

$\lambda=(2b)/h$	el-pl [12]		el-pl ($f=10^{-4}$)		elastično / elastic	
	M	p_{cr}/σ_{pl}	M	p_{cr}/σ_{pl}	M	p_{cr}/σ_{pl}
128	0	0,480	0	0,481	0	0,481
124	0	0,514	0	0,513	0	0,513
111	0	0,621	0	0,628	0	0,640
102	0	0,710	0	0,721	0	0,758
95	0	0,807	1	0,831	0	0,874
87	1	0,875	1	0,867	0	1,042
73	2	0,891	1	0,879	0	1,479
66	3	0,894	1	0,883	0	1,810

Preglednica 4. Reuss-Prandtlove napetostno-deformacijske zveze (IV, $a/b=0,2$, $\alpha=0$, $\beta=-1$)Table 4. Reuss-Prandtl's stress-strain relations (IV, $a/b=0.2$, $\alpha=0$, $\beta=-1$)

$\lambda=(2b)/h$	el-pl [12]		el-pl ($f=10^{-4}$)		elastično / elastic	
	M	p_{cr}/σ_{pl}	M	p_{cr}/σ_{pl}	M	p_{cr}/σ_{pl}
128	0	0,480	0	0,481	0	0,481
124	0	0,514	0	0,513	0	0,513
111	0	0,621	0	0,630	0	0,640
102	0	0,710	0	0,723	0	0,758
95	0	0,807	1	0,853	0	0,874
90	0	0,875	1	0,874	0	0,973
80	0	0,891	1	0,880	0	1,232
69	1	0,894	1	0,885	0	1,655



Sl. 4. Relativna globina plastifikacije in kritična obremenitev po različnih teorijah (IV, $a/b=0.2$, $\alpha=0$, $\beta=-1$)
 Fig. 4. Relative depth of plastification and buckling loads for different theories (IV, $a/b=0.2$, $\alpha=0$, $\beta=-1$)

$p_{cr}/\sigma_{pl}=0.885$, kar je bistveno manj od vrednosti $p_{cr}/\sigma_{pl}=1.655$, ki nam jo daje elastična rešitev za isti primer. Opazna je tudi razlika med rezultati, dobljenimi na osnovi Reuss-Prandtl'ovih napetostno deformacijskih zvez, ki dajejo v primerjavi s Henckyjevimi nekoliko večje kritične obremenitve pri manjšem številu valov m .

Slika 6 prikazuje vpliv stopnje utrjevanja materiala f na kritično obremenitev. Razvidno je, da so pri večjih stopnjah utrjevanja večje tudi kritične obremenitve, pri čemer preide celotno območje plošče v elasto-plastično področje pri večjih vitkosti. Slika 6 prikazuje izbočitvene koeficiente κ v odvisnosti od vitkosti za ploščo iz materiala s stopnjo utrjevanja $f=0.1$ pri različnih razmerjih a/b in načinu podprtja IV. Črtkano nadaljevanje krivulj na slikah 5 in 6 pomeni, da je bilo ob izbočitvi celotno območje plošče že v plastičnem področju ($r_{pl}/b=1.0$).

6 SKLEP

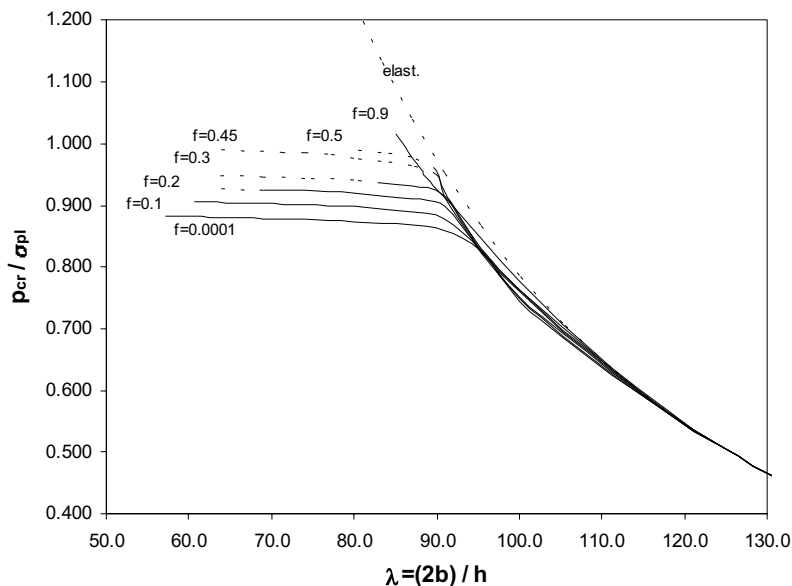
Najprej lahko ugotovimo, da zaradi upoštevanja Shanleyeve hipoteze, pomenijo izračunane vrednosti spodnje meje kritičnih obremenitev. Iz rezultatov je razvidno, da se plošča izboči v elastičnem področju le v primerih razmeroma vitkih plošč. S povečevanjem debeline se kritična obremenitev plošče veča. Kritična obremenitev, določena z upoštevanjem plastifikacije, je manjša od tiste, ki jo napoveduje izbočitveni koeficient za elastično področje. Zmanjšanje kritične obremenitve je še posebej izrazito pri materialih z majhno stopnjo utrjevanja f . V takšnih primerih je nujno treba upoštevati plastifikacijo. V primeru, ko ima material večjo stopnjo utrjevanja f , se hitreje zvečujejo napetosti v plastificiranem delu plošče. Posledica tega je, da pride pri določenih vitkosti prej do porušitve plošče zaradi presežene meje trdnosti materiala kakor zaradi izgube stabilnosti. Izkaže se tudi, da se pojavi v

region ($r_{pl}=b$, $\lambda=66$) the buckling load is only $p_{cr}/\sigma_{pl}=0.885$, compared to the the elastic solution $p_{cr}/\sigma_{pl}=1.655$ for the same case. It can be seen that Reuss-Prandtl's stress-strain relations give larger buckling loads compared to Hencky and a smaller number of waves m .

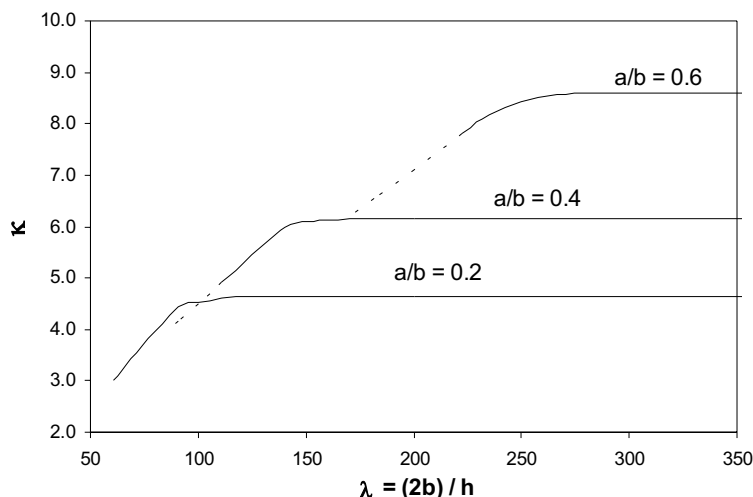
Figure 6 shows the influence of the hardening coefficient f on the buckling load. It can be seen that for larger values of f the buckling loads are larger and that the whole area of the plate reaches the elastic-plastic region at larger values of slenderness. The dotted curves in figures 5 and 6 show that the whole plate was already in the elastic-plastic region when the buckling occurred ($r_{pl}/b=1.0$). In Fig. 6 the relationship between the buckling coefficient κ and the slenderness of the plate made of a material with a hardening coefficient $f=0.1$ at different ratio a/b , case IV.

6 CONCLUSION

First, we must observe that because Shanley's hypothesis was considered the calculated values represent the lower values of the buckling loads. The results show that the plate buckles in the elastic region only for relatively thin-slender plates. The load capacity of the plate with the consideration of plastification is smaller than the load capacity defined by the elastic buckling coefficient. The reduction of the buckling load is especially noticeable for materials with small hardening coefficients f . In such cases the consideration of plastification is inevitable. In cases where the material has a larger hardening coefficient f the stresses in the elastic-plastic region of the plate increase more rapidly. The consequence is that, at a certain slenderness, the plate collapses because the maximum stress of the material is exceeded and not because of buckling. It



Sl. 5. Vpliv stopnje utrjevanja f na kritično obremenitev (IV, $a/b=0,2$, $\alpha=0$, $\beta=-1$)
 Fig. 5. Influence of the hardening factor f on the buckling load (IV, $a/b=0,2$, $\alpha=0$, $\beta=-1$)



Sl. 6. Vpliv razmerja radijev a/b na izbočitveni koeficient (IV, $f=0,1$, $\alpha=0$, $\beta=-1$)
 Fig. 6. Influence of the ratio a/b on the buckling coefficient (IV, $f=0,1$, $\alpha=0$, $\beta=-1$)

elasto-plastičnem področju nestabilno stanje in izbočitev pri večjem številu valov m kakor pri izbočitvi v elastičnem področju.

can also be seen that in the elastic-plastic region the unstable state and the buckling process appears with a greater number of waves m than in the elastic region.

7 REFERENCE
 7 REFERENCES

- [1] Kosel, F. (1979) Elastic stability of an excentric circular annulus, *Theoretical and Applied Mechanics*, 5, 51-62, Beograd.
- [2] Kosel, F., M. Škerlj (1982) Finite difference solution of the stability of a plate with hole, Anton Kuhelj memorial volume, Ljubljana, *SAZU*, 205-214.
- [3] Baebler, M., F. Kosel (1982) Experimental investigation of the stability of thin circular plates with holes, Anton Kuhelj memorial volume, Ljubljana, *SAZU*, 153-165.
- [4] Kosel, F., J. Chen (1994) Geometry optimisation of the elastostatic stability problem of annular subjected to two concentrated loads, Berlin, *Z. Angew. Math. und Mech.* 74, 4, 305-308.
- [5] Kumelj, T. F. Kosel (1995) Elastic stability of thin annular plates made of rectilinearly orthotropic material, *An International Journal of Computers & Structures*, Vol. 54, 141-145, Great Britain.
- [6] Stowell, E. Z. (1948) A unified theory of plastic buckling of columns and plates, *NACA technical note Nr. 1556*.

- [7] Mendelson, A. (1968) Plasticity: theory and application, *The Mac Millan Comp.*, New York.
- [8] Škerlj, M., F. Kosel (1973) Déformations et tensions dans le couvercle de turbine, *Strojniški vestnik, (Journal of Mechanical Engineering)*, Ljubljana, 1, 1-5.
- [9] Kosel, F., J. Chen Jin (1997) Buckling of a thin annular plate subjected to two opposite locally acting pressures and supported at two opposite points, *An International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 39, No.12., 1325-1343, PII: S0020-7403(97)00019-2, Great Britain.
- [10] Škerlj, M. (1968) Die allgemeine Lösung des achsensymmetrischen Stabilitätsproblems einer Kreisringscheibe, *Strojniški vestnik*, Ljubljana, 3, 1-8.
- [11] Kosel, F. (2001) Elastic buckling of a thin excentric circular annulus, *Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik (GAMM) 2001*, Zürich, 71-72.
- [12] Pertot, B. (1972) Problemi elasto-plastičnih deformacij pri ravninskih elementih s posebnim ozirom na stabilnostne razmere, doktorska disertacija, *Fakulteta za strojništvo*, Ljubljana.

Naslov avtorjev: Boštjan Bremec
prof.dr. Franc Kosel
Fakulteta za strojništvo
Univerza v Ljubljani
Aškerčeva 6
1000 Ljubljana

Authors' Address: Boštjan Bremec
Prof.Dr. Franc Kosel
Faculty of Mechanical Eng.
University of Ljubljana
Aškerčeva 6
1000 Ljubljana, Slovenia

Prejeto:
Received: 19.3.2001

Sprejeto:
Accepted: 7.12.2001