

## Osnove bispektralne analize

### Theoretical Background of the Bispectral Analysis

Igor Simonovski · Miha Boltežar · Anton Kuhelj

*Kumulantni spekter tretjega reda oz. bispekter je definiran kot dvodimenzionalna Fourierjeva transformacija kumulanta tretjega reda. Namesto dvodimenzionalne Fourierjeve transformacije kumulanta lahko bispekter izračunamo tudi kot produkt Fourierjeve transformacije merjenega signala pri treh frekvencah. Zaradi občutljivosti cenilke bispektra na vrednosti spektra drugega reda se bispekter normalizira v poševnostno funkcijo bispektra ali pa kvadratično bikoherenco. Normalizacija pa ima tudi slabe lastnosti, predvsem občutljivost poševnostne funkcije bispektra in kvadratične bikoherenca na deljenje z majhnimi števili ter na Gaussov šum. V tem prispevku so razloženi ti osnovni vplivi ter podani nasveti za izračun cenilk bispektrov. Bispektralna analiza je v zadnjem delu prispevka uporabljena za analizo kvadratične nelinearnosti nihanja pralne skupine pralnega stroja.*

© 1999 Strojniški vestnik. Vse pravice pridržane.

**(Ključne besede: bispektri, funkcije poševnostne, cenilke, bikoherenca kvadratična)**

*Third-order cumulant spectrum i.e. bispectrum is defined as a 2D Fourier transform of the third-order cumulant. Alternatively bispectrum can be calculated as a product of Fourier transform at three distinct frequencies. Due to the sensitivity of the bispectrum's estimate to the second order properties of the signal, normalized bispectra such as skewness function and bicoherence squared are often used. Unfortunately the side effect of the normalizing process is the sensibility of the skewness function and bicoherence squared to the Gaussian noise. In this paper basic estimation issues are presented and recommendations for estimating bispectra are given. In the last part of the paper bispectral analysis is used to analyze quadratic nonlinearities of the washing machine's washing part.*

© 1999 Journal of Mechanical Engineering. All rights reserved.

**(Keywords: bispectra, skewness function, estimates, bicoherence squared)**

#### 0 UVOD

Uporaba močnostnega spektra je zadnjih 20 do 30 let pogosto uporabljano orodje za analizo tako determinističnih kakor tudi naključnih pojavov na podlagi analiz merjenih spremenljivk, izhajajoč iz realnih tehničnih sistemov. Glavni razmah uporabe diskretne Fourierjeve transformacije (DFT) kot direktne metode za določevanje cenilke močnostnega spektra diskretizirane merjene spremenljivke - časovne vrste je sledil uvedbi algoritma hitre Fourierjeve transformacije (FFT).

Pri določevanju cenilke močnostnega spektra je signal procesiran na način, da pokaže porazdelitev moči signala med posameznimi, med seboj nepovezanimi frekvenčnimi komponentami. S tem se faze poveže med posameznimi frekvenčnimi komponentami izgubijo. Informacija, izražena v močnostnem spektru v frekvenčnem prostoru, je enaka informaciji, ki jo daje avtokorelacijska funkcija v časovnem prostoru. Ta v popolnosti zadošča za celotni statistični popis signala z normalno (Gaussovo) gostoto verjetnostne porazdelitve. Močnostni spektri imajo zelo majhno zmožnost zaznavanja faznih razmerij med posameznimi frekvencami in so zato zelo uporabni na področjih, na katerih za ponazoritev procesa uporabljamo linearne modele [1].

#### 0 INTRODUCTION

In the last 20 to 30 years the power spectrum is seen as a powerful tool for analyzing both deterministic and stochastic technical processes. Following the application of the fast Fourier transform (FFT), the discrete Fourier transform (DFT) has been used more and more widely for obtaining the power spectrum's estimate.

When estimating power spectrum, the assumption is made that the frequency components are uncorrelated, thus compressing the phase relations between them. Essentially the frequency information contained in the power spectrum is equal to the time domain information contained in the autocorrelation function. These information are sufficient for a complete statistical description of a signal with the Gaussian probability density function. Because power spectra have very limited capability of detecting phase relations, they are very useful in areas, where linear models are used [1].

Vendar pa se v praksi pojavljajo tudi sistemi, ki terjajo analizo signalov zunaj okvirov normalne porazdelitve. Taki sistemi terjajo torej analizo iznad one, ki jo daje avtokorelacijska funkcija. Spektralne analize višjih redov, imenovane tudi "statistika višjega reda" signala, vsebujejo te dodatne informacije. Spektri višjega reda so znani tudi pod imenom polispektri. Posebna primera polispektrov sta bispekter, temelječ na Fourierjevi transformaciji statistike tretjega reda (poševnost gostote verjetnostne porazdelitve) in trispekter, ki temelji na Fourierjevi transformaciji statistike četrtega reda (sploščenost gostote verjetnostne porazdelitve). Tako si lahko sedaj navadni močnostni spekter predstavljamo kot spekter drugega reda.

V zadnjih letih se čedalje pogosteje uporabljajo tudi bispektri. Uporabljamo jih za pridobivanje dodatnih informacij o procesu ter za analizo nelinearnih procesov. Bispektri namreč omogočajo:

- identifikacijo negaussovih procesov,
- izločitev Gaussovega šuma,
- identifikacijo sistemov z neminimalno fazo,
- ugotavljanje posameznih vrst nelinearnosti v procesu,
- ocenitev števila harmonikov, njihovih amplitud ter faz v procesu,
- ocenitev zakasnitvenih časov med posameznimi merilnimi mesti,
- ocenitev prenosnih funkcij itn.

Izračun cenilke bispektra je v primerjavi s cenilko spektra drugega reda bistveno bolj zahteven [2]. Osnovni vplivi, npr. izbira okna ali pretakanje moči, so tu veliko bolj izraženi, poleg tega pa tudi sam numerični del zahteva veliko večje število numeričnih operacij [3]. Navkljub numerični zahtevnosti pa prednosti bispektrov, predvsem njihova zmožnost za izločitev Gaussovega šuma ter zmožnost odkrivanja nelinearnosti, širijo njihovo uporabo. Tako jih dandanes srečujemo na področju identifikacije govora [2], identifikacije frekvenčnega sklapljanja v oscilatorjih z veliko prostostnimi stopnjami [4] in [5], sonarjev [6], radarjev [7], geofizike [8] in [9], obdelave slik [1] in spremljanja obratovalnega stanja [10] do [12].

## 1 OSNOVE TEORIJE BISPEKTROV

### 1.1 Definicija

Bispektri temeljijo na momentih oziroma kumulantih tretjega reda. Pri determinističnih procesih uporabljamo momentne bispektre, pri naključnih procesih pa raje uporabljamo kumulantne bispektre. Za naključen, realen in stacionaren proces  $x(n)$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  je diskretni kumulantni bispekter  $B(2\pi f_1, 2\pi f_2)$  definiran kot [1]:

$$B(2\pi f_1, 2\pi f_2) = \sum_{\tau_1=-\infty}^{\tau_1=+\infty} \sum_{\tau_2=-\infty}^{\tau_2=+\infty} c_3(\tau_1, \tau_2) \cdot e^{-j(2\pi f_1 \tau_1 + 2\pi f_2 \tau_2)} \quad (1),$$

kjer je  $c_3(\tau_1, \tau_2)$  kumulant tretjega reda procesa  $x(n)$ . Bispekter je torej v bistvu dvodimenzionalna Fourierjeva transformacija statistike tretjega reda.

However we must often deal with nonlinear systems, where second-order spectral analysis is insufficient. In these cases higher-order spectra, known also as polyspectra, must be used. Special cases of higher-order spectra are bispectra and trispectra. Bispectra and trispectra are based upon third and fourth-order Fourier transform and contain information on the skewness and kurtosis of the probability distribution. In this light the power spectrum can be thought of as a second-order spectrum.

In the last ten years the use of the bispectra is increasing. Bispectra are used to provide additional insight into nonlinear processes, in particular for:

- identification of non-Gaussian processes,
- filtering out Gaussian noise,
- identification of non-minimum phase systems,
- identification of certain types of nonlinearities,
- estimation of the number of harmonics, amplitudes and phases in a process,
- time delay estimations between measurement sensors,
- estimation of transfer functions, etc.

The bispectrum estimation is in comparison to the second order spectrum estimation significantly more complex [2]. Basic parameters such as window type, spectral leakage etc. have higher impact, plus the number of numerical operations is larger [3]. Despite of the numerical's complexity, the advantages of the bispectra, in particular their ability to filter out Gaussian noise and to detect nonlinearities, have spreaded the usage of the bispectrum. Bispectra can nowadays be found in the field of speech recognition [2], identification of quadratic phase coupling in oscillators with large number of degrees of freedom [4] and [5], sonars [6], radars [7], geophysics [8] and [9], image processing [1] and condition monitoring [10] to [12].

## 1 THEORETICAL BACKGROUND OF BISPECTRA

### 1.1 Definition

Bispectra are based upon third-order moments or cumulants. Moment bispectra should be used when dealing with deterministic processes while on the other hand cumulant bispectra should be used when dealing with stochastic processes. Assuming that  $x(n)$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  is a stochastic, real and stationary process, the discrete cumulant bispectrum  $B(2\pi f_1, 2\pi f_2)$  is defined as [1]:

where  $c_3(\tau_1, \tau_2)$  stands for third-order cumulant of the process  $x(n)$ . Bispectrum is therefore essentially a 2D Fourier transform of a third-order statistics. Al-

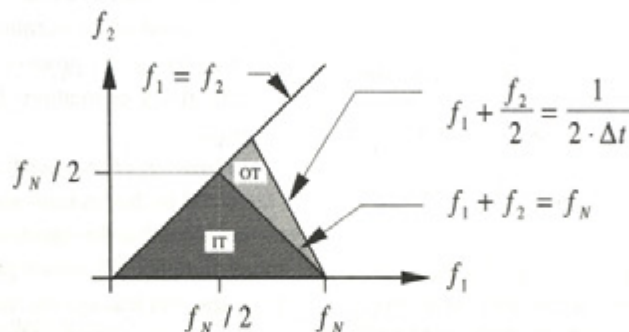
Alternativno pa lahko bispekter izračunamo z uporabo diskretne Fourierjeve transformacije (DFT) [6]. Konsistentno cenilko bispektra  $\hat{B}$  tvorimo tako, da signal  $x(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ , dolžine  $N$  točk, razdelimo na  $K$  segmentov dolžine  $M$  točk ( $N = K \cdot M$ ). Najprej izračunamo DFT transformacijo vsakega segmenta  $X_i$ , cenilko bispektra pa dobimo tako, da izračunamo povprečno vrednost produkta DFT transformacije pri treh frekvencah:

$$\hat{B}(k_1, k_2) = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} X_i(k_1) \cdot X_i(k_2) \cdot X_i^*(k_1 + k_2) \quad (2)$$

kjer so  $k_1$  in  $k_2$  indeksa frekvenc,  $i$  indeks segmenta,  $X_i^*$  kompleksno konjugirano število številu  $X_i$ , označba  $\hat{\phantom{x}}$  pa pove, da imamo opravka s cenilko. Če smo pri vzorčenju procesa upoštevali Nyquistov kriterij  $f_{\max} \leq f_N = f_s/2 = 1/(2 \cdot \Delta t)$ , kjer je  $f_s = 1/\Delta t$  frekvenca vzorčenja, osnovno definicijsko območje bispektra sestavljata notranji (NT) in zunanji (ZT) trikotnik (sl. 1).

ternatively, bispectrum can be calculated using discrete Fourier transform (DFT) [6]. Bispectrum's consistent estimate  $\hat{B}$  is constructed by dividing the signal  $x(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ , of length  $N$  points, into  $K$  segments, of length  $M$  points ( $N = K \cdot M$ ). The DFT  $X$  of each segment is calculated and bispectrum's estimate is calculated by averaging over segments:

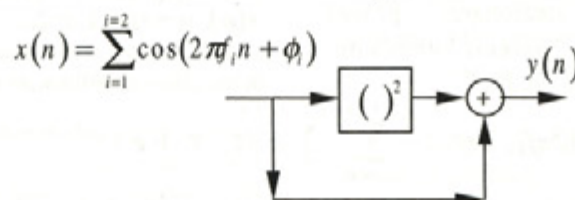
where  $k_1$  and  $k_2$  denote the frequency indexes,  $i$  the index of the segment,  $X_i^*$  complex conjugate of  $X_i$  and  $\hat{\phantom{x}}$  stands for the estimate. Considering the Nyquist criterion  $f_{\max} \leq f_N = f_s/2 = 1/(2 \cdot \Delta t)$ , where  $f_s = 1/\Delta t$  denotes the sampling frequency, the principal domain of the bispectrum is composed of the inner (IT) and the outer (OT) triangle (Fig. 1).



Sl. 1. Osnovno definicijsko območje diskretnega bispektra  
Fig. 1. Principal definition domain of the discrete bispectrum

Ker so kumulanti tretjega in višjih redov Gaussovega procesa enaki nič, je tudi bispekter Gaussovih procesov enak nič. To lastnost lahko izrabimo za izločevanje Gaussovega šuma iz meritve [1]. Bispektre pa uporabljamo tudi pri analizi nelinearnosti procesov [10] do [13]. Pojav, pri katerem so fazne povezave istega tipa kakor frekvenčne povezave, imenujemo kvadratično sklapljanje faz (KSF). Bispekter zaznava kvadratično sklapljanje faz dveh frekvenc, zato ga lahko uporabimo za detekcijo kvadratičnih nelinearnosti v procesu. Za lažjo predstavitev si oglejmo, kaj se zgodi s kosinusnim signalom, ki ga spustimo skozi kvadratični filter (sl. 2). Izhodni proces je naslednje oblike:

$$y(n) = \cos(2\pi f_1 n + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 n + \phi_2) + 1 + \frac{1}{2} \cos(2\pi 2 f_1 n + 2\phi_1) + \cos(2\pi (f_1 + f_2) n + (\phi_1 + \phi_2)) \\ + \cos(2\pi (f_1 - f_2) n + (\phi_1 - \phi_2)) + \frac{1}{2} \cos(2\pi 2 f_2 n + 2\phi_2) \quad (3)$$



Sl. 2. Filter, sestavljen iz linearnih in nelinearnih komponent  
Fig. 2. Schematic diagram of a simple generator for QPC signal

Because third and higher order cumulants of Gaussian process are identically zero, the bispectrum of the Gaussian process is also zero. This property can be used to filter out the Gaussian noise from the measurement [1]. On the other hand bispectrum is used to analyze nonlinear processes [10] to [13]. A phenomenon, which gives rise to certain phase relations of the same type as the frequency relations is called quadratic phase coupling (QPC). Due to the fact that the bispectrum detects QPC, it can be used to detect quadratic nonlinearities in the signal. Figure 2 presents a quadratic filter, the input of which is cosinoidal signal. The output is therefore:

Preglednica 1. Povezava frekvenc in faz  
Table 1. Frequency and phase relations

frekvenca frequency	faza phase
$2f_1$	$2\phi_1$
$2f_2$	$2\phi_2$
$f_1 + f_2$	$\phi_1 + \phi_2$
$f_1 - f_2$	$\phi_1 - \phi_2$

Iz enačbe (3) je razvidno, da ima posamezna frekvenca enako obliko kakor ustrezna faza (pregl. 1). Te povezave so posledica kvadratične nelinearnosti, zato rečemo, da je prišlo do kvadratičnega sklapljanja faz.

### 1.2 Cenilke bispektra

Ocena variance cenilke bispektra bo navedena le za naključne procese. Cenilka bispektra je asimptotsko kompleksno normalno porazdeljena okoli teoretične vrednosti bispektra [6] in [8], kar pomeni, da sta realni in imaginarni del medsebojno neodvisna in normalno porazdeljena. Poleg tega je taka cenilka asimptotsko nepristranska, saj se z večanjem števila točk v posameznem segmentu približuje teoretični vrednosti bispektra [6]. Slaba stran te cenilke pa je, da je varianca cenilke bispektra odvisna od vrednosti spektra drugega reda  $P$  [6] in [14]:

$$\text{var}\{\hat{B}(k_1, k_2)\} = \frac{1}{K} \cdot P(k_1) \cdot P(k_2) \cdot P(k_1 + k_2) \cdot [1 - |B(k_1, k_2)|^2] \quad (4)$$

Da do tega ne pride, bispekter normaliziramo tako, da je varianca normaliziranega bispektra odvisna samo od parametrov tretjega reda. Pri naključnih procesih tako uporabljamo poševnostno funkcijo bispektra:

$$\hat{s}^2(k_1, k_2) = \frac{\hat{B}(k_1, k_2)^2}{\hat{P}(k_1) \cdot \hat{P}(k_2) \cdot \hat{P}(k_1 + k_2)} \quad (5)$$

medtem ko se je pri harmonskih procesih uveljavila kvadratična bikoherenca [2], [9] in [13]:

$$\hat{b}^2(k_1, k_2) = \frac{\hat{B}(k_1, k_2)^2}{\left[ \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{i=K-1} |X_i(k_1) \cdot X_i(k_2)| \cdot \hat{P}(k_1 + k_2) \right]} \quad (6)$$

Harmonski proces si lahko predstavljamo kot:

$$y(n) = \sum_{i=1}^{i=p} A_i \cos(2\pi f_i n + \phi_i) + g(n) \quad (7)$$

kjer pomenijo  $A_i$  amplitudo,  $f_i$  frekvenco,  $\phi_i$  fazo,  $g(n)$  pa šum z Gaussovo gostoto porazdelitve naključne spremenljivke.

V nasprotju s poševnostno funkcijo bispektra varianca kvadratične bikoherence sicer ni konstantna, je pa vrednost cenilke kvadratične bikoherence omejena [2]:

$$0 \leq \hat{b}^2(k_1, k_2) \leq 1 \quad (8)$$

It is obvious that frequency relations are of the same type as the phase relations (Table 1). This relations are caused by quadratic nonlinearity, thus the expression QPC.

### 1.2 Bispectrum's estimates

The asymptotic distribution of the bispectrum's estimate is complex normal around the true value [6] and [8], which means that the distribution of both real and imaginary part are independent of each other and normally distributed. Greater the number of points in the segment is, closer the bispectrum's estimate is to the true value, thus the bispectrum's estimate is asymptotically unbiased [6]. Unfortunately the bispectrum's variance is dependant upon the second-order spectrum  $P$  [6] and [14]:

To overcome this problem, bispectrum is normalized in a way to remove the second-order dependency of the variance. When dealing with the stochastic processes, a normalized bispectrum, called skewness function is used:

while on the other hand when dealing with harmonic processes bicoherence squared is used [2], [9] and [13]:

Harmonic process is presented by equation:

where  $A_i$ ,  $f_i$  and  $\phi_i$  denote amplitude, frequency and phase, while  $g(n)$  stands for Gaussian noise.

Although the bicoherence's squared variance is not constant, the bicoherence squared values are bounded [2]:

Ker pri normalizaciji bispektra, en. (5) ali (6), spektralne vrednosti delimo z močnostnim spektrom, ki je občutljiv na Gaussov šum, sta posledično tudi poševnostna funkcija bispektra ter kvadratična bikoherenca občutljivi na Gaussov šum. V splošnem se zato vrednosti poševnostne funkcije bispektra ter kvadratične bikoherence zmanjšajo [2].

V tem prispevku se bomo omejili le na kvadratično bikoherenco. Lastnosti poševnostne funkcije bispektra so navedene v [1], [6] in [10].

Kvadratično bikoherenco lahko predstavimo kot delež moči v signalu, ki je nastal zaradi KSF [2] in [13]. Poglejmo si praktični primer. Pripravimo dve vrsti signala (7):

- s KSF,
- brez KSF.

Signala sta v obeh primerih sestavljena iz treh kosinusov,  $f_1 = 3,125$  Hz,  $f_2 = 5$  Hz,  $f_3 = f_1 + f_2 = 8,125$  Hz ter vzorčena s  $f_s = 20$  Hz. Za vsak signal generiramo 64 segmentov z 256 točkami. Faze  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  in  $\phi_3$  so v segmentu sicer konstantne, med segmenti pa se spreminjajo. V primeru a) na začetku vsakega segmenta generiramo fazi  $\phi_1$  in  $\phi_2$  z naključnim generatorjem s konstantno gostoto porazdelitve naključne spremenljivke v mejah  $[0, 2\pi]$ , tretja faza pa je vsota prvih dveh  $\phi_3 = \phi_1 + \phi_2$ . V primeru b) tudi tretjo fazo generiramo z naključnim generatorjem v mejah  $[0, 2\pi]$ .

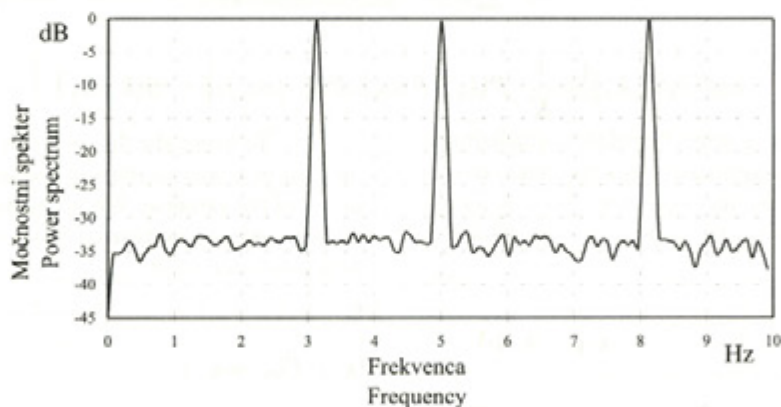
In the normalizing process, eq. (5) and (6), spectral values are divided by power spectrum, which is sensitive to Gaussian noise, thus both skewness function and bicoherence squared are both sensitive to it. In general the values of the skewness function and bicoherence squared decrease in the presence of the Gaussian noise [2].

This paper deals only with the bicoherence squared. The properties of the skewness function are given in [1], [6] and [10].

Bicoherence squared measures the phase coherency among three harmonics and can be interpreted as the portion of the power due to the QPC [2] and [13]. To demonstrate this let us generate two kinds of signal (7):

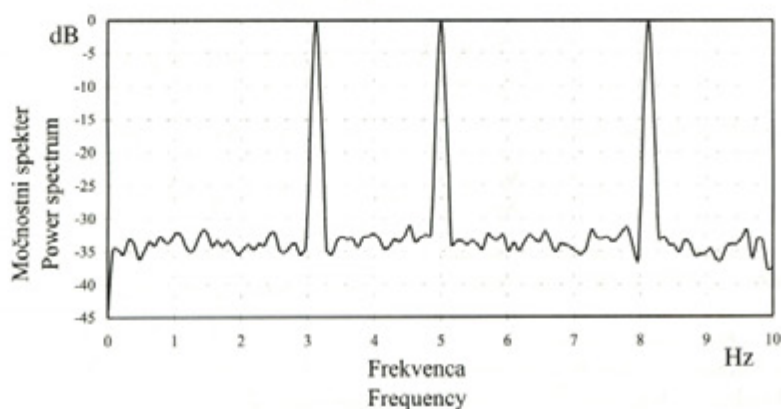
- with QPC,
- without QPC.

In both cases signals are composed of three cosines,  $f_1 = 3.125$  Hz,  $f_2 = 5$  Hz,  $f_3 = f_1 + f_2 = 8.125$  Hz and sampled with  $f_s = 20$  Hz. For each signal 64 segments with 256 points were generated. In the case a), the phases  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  were chosen from a set of random numbers, uniformly distributed over  $[0, 2\pi]$ . The third phase  $\phi_3$  was given as a sum  $\phi_1 + \phi_2$ . In the case b), all three phases  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  and  $\phi_3$  were chosen from a set of random numbers, uniformly distributed over  $[0, 2\pi]$ . In each segment the phases were constant. For both sig-



Sl. 3. Močnostni spekter signala a) - s KSF

Fig. 3. Power spectrum of a signal a) - QPC present



Sl. 4. Močnostni spekter signala b) - brez KSF

Fig. 4. Power spectrum of a signal b) - without QPC

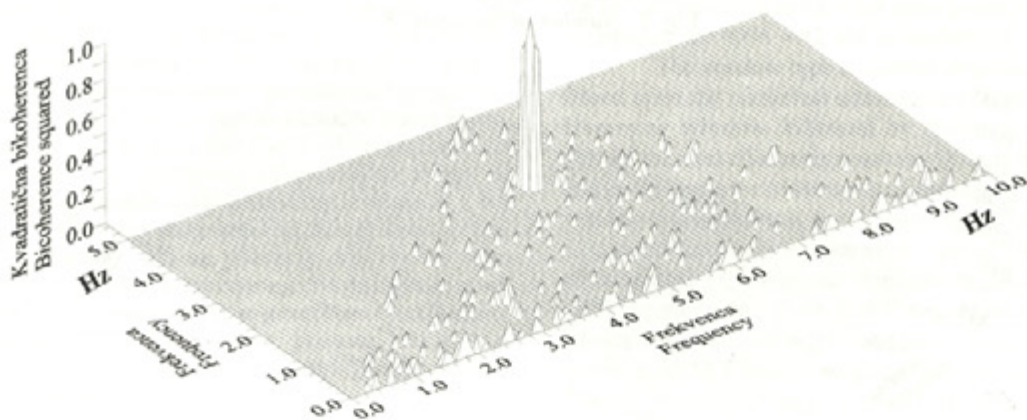
## Preglednica 2. Podatki o generiranih signalih

Table 2. Generated signals

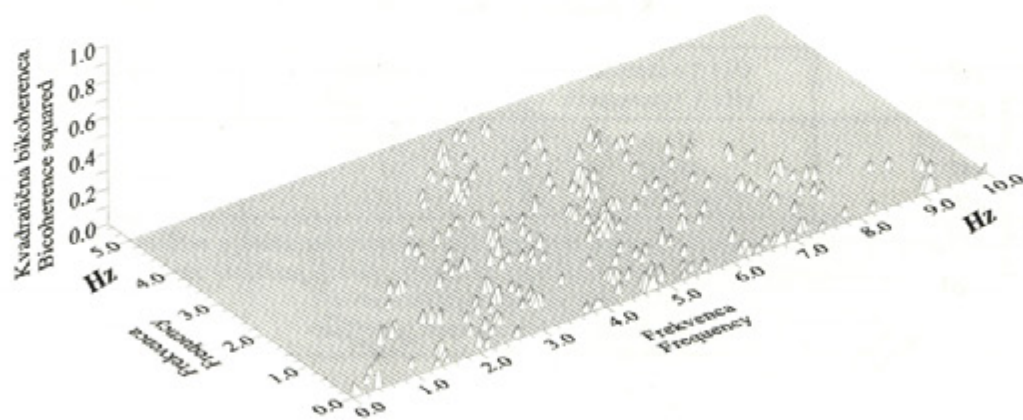
Signal a)		Signal b)	
$f_1 = 3,125 \text{ Hz}$	$\phi_1 = \text{rand}_{\text{Konst.}}[0, 2\pi]$	$f_1 = 3,125 \text{ Hz}$	$\phi_1 = \text{rand}_{\text{Konst.}}[0, 2\pi]$
$f_2 = 5 \text{ Hz}$	$\phi_2 = \text{rand}_{\text{Konst.}}[0, 2\pi]$	$f_2 = 5 \text{ Hz}$	$\phi_2 = \text{rand}_{\text{Konst.}}[0, 2\pi]$
$f_3 = f_1 + f_2 = 8,125 \text{ Hz}$	$\phi_3 = \phi_1 + \phi_2$	$f_3 = f_1 + f_2 = 8,125 \text{ Hz}$	$\phi_3 = \text{rand}_{\text{Konst.}}[0, 2\pi]$
Šum $g(n)$ : Gaussova gostota porazdelitve naključne spremenljivke, srednja vrednost 0, varianca 1,0, Noise $g(n)$ : Gaussian density of random variable, mean value 0, variance 1,0, $f_s = 1/\Delta t = 20 \text{ Hz}$			

V obeh primerih je dodan še Gaussov šum z nično srednjo vrednostjo in varianco 1,0. Podatki o obeh signalih so podani v preglednici 2. Sliki 3 in 4 prikazujeta močnostni spekter obeh signalov (število vhodnih točk v FFT rutini je 256). Močnostna spektra sta v območju od 0 do -30 (dB) praktično enaka, pri nižjih vrednostih pa so razlike posledica malo drugačnih vrednostih Gaussovega šuma. Iz močnostnih spektrov torej ni razvidna razlika v signalih. Razliko pa lepo pokaže kvadratična bikoherenca (sl. 5 in 6). Pri kvadratični bikoherenci signala a) (sl. 5) lahko opazimo

nals Gaussian noise with zero mean value and variance 1.0 was added. All used data is gathered in Table 2. Figures 3 and 4 present power spectra of both signals (the number of input points in the FFT routine was 256). We can see that power spectra are almost identical in the range 0 to -30 dB, at lower values power spectra have slightly different values which can be ascribed to the slightly different values in the set of random numbers. Power spectra do not reflect the differences of the two signals. The bicoherence's squared of the two signals are however quite different (Fig. 5 and 6).



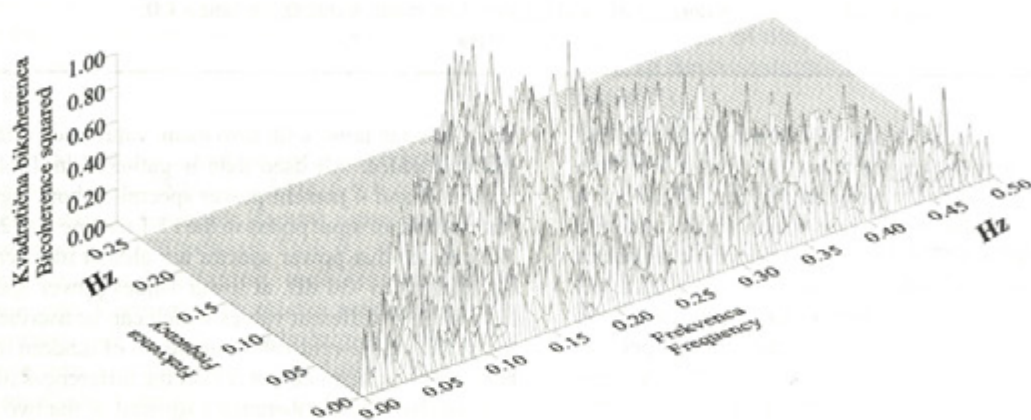
Sl. 5. Kvadratična bikoherenca signala a) - s KSF  
 Fig. 5. Bicoherence squared of a signal a) - with QPC



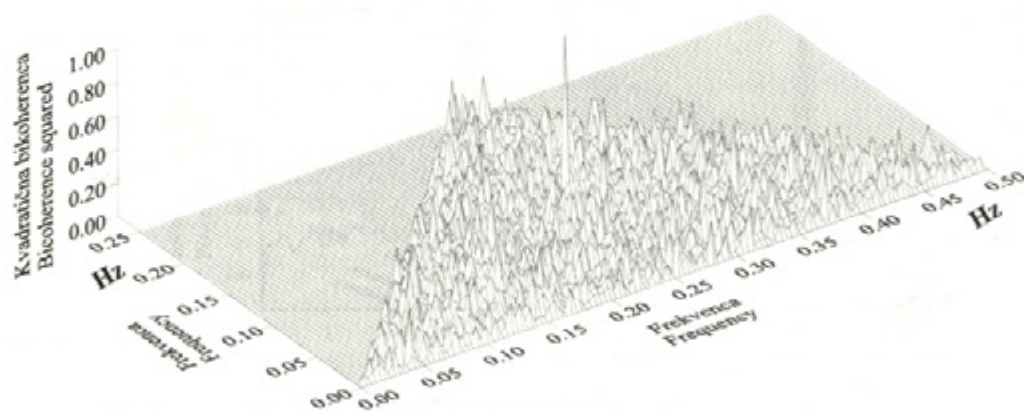
Sl. 6. Kvadratična bikoherenca signala b) - brez KSF  
 Fig. 6. Bicoherence squared of a signal b) - without QPC

pri bifrekvenci (5, 3,125) Hz "iglo" z vrednostjo 0,94. To pomeni, da je 94% moči signala a) pri frekvencah  $5 + 3,125 = 8,125$  Hz posledica KSF frekvenc 5 in 3,125 Hz. Harmonik 8,125 Hz je torej posledica KSF. Teoretično bi morala biti vrednost kvadratične bikoherence enaka 1, vendar zaradi relativno slabe frekvenčne ločljivosti prihaja do odtekanja moči na sosednje točke, kar se kaže v manjši vrednosti kvadratične bikoherence 0,94.

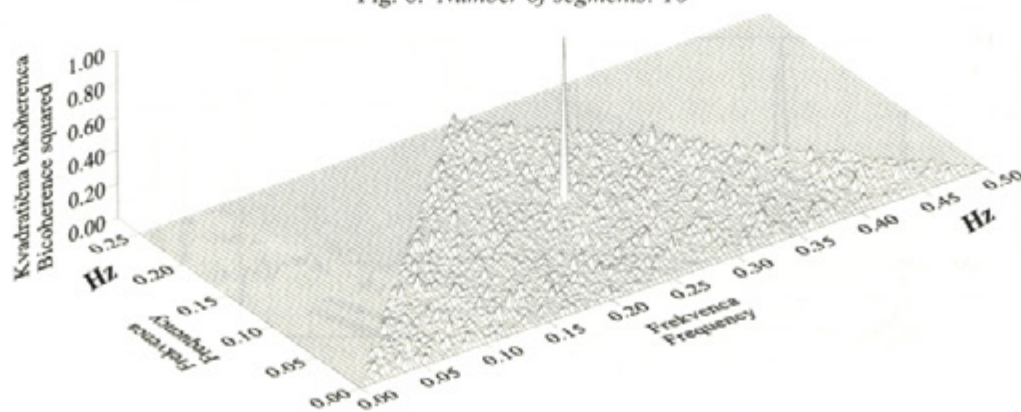
Bicoherence squared of the signals a), Figure 5, exhibits a peak of 0.94 at bifrequency (5, 3.125) Hz pointing to the phase coupling of the frequencies 5 and 3.125 Hz. 8.125 Hz harmonic is therefore the consequence of QPC ( $5 + 3.125 = 8.125$  Hz). Theoretically, the value of the bicoherence squared should be 1, but because of the relatively low frequency resolution, the power leaks to the neighboring frequencies, lowering the bicoherence's squared value to 0.94.



Sl. 7. Število segmentov: 8  
Fig. 7. Number of segments: 8



Sl. 8. Število segmentov: 16  
Fig. 8. Number of segments: 16



Sl. 9. Število segmentov: 64  
Fig. 9. Number of segments: 64

### 1.3 Vplivi na cenilko kvadratične bikoherence

Pri izračunih spektrov drugega reda (močnostnega oz. energijskega spektra) vpliva na kakovost cenilke vrsta parametrov, npr. število vhodnih točk v programu FFT, izbira okna, šum, število segmentov itn. Vpliv omenjenih parametrov je pri izračunu cenilke kvadratične bikoherence še težje predvidljiv. Osnovni parameter, s katerim se srečamo, je izbira števila vhodnih točk v programu FFT. Zaradi izboljšanja frekvenčne ločljivosti je zaželeno čim večje število točk, vendar je za kakovosten izračun cenilke kvadratične bikoherence potrebno število segmentov vsaj 60 [2] in [3]. Vpliv števila segmentov je prikazan na slikah 7 do 9. Prikazana je kvadratična bikoherenca harmonskega signala, en. (7), ki je bila izračunana z 256 vhodnimi točkami v programu FFT, uporabljeno pa je bilo pravokotno okno. Podatki o generiranem signalu so podani s preglednico 3.

Omejitev z dolžino signala nas torej prisili v kompromis. Tudi numerična zahtevnost izračuna ter količina potrebnega spomina nas silita v omejitev števila vhodnih točk. Potreben spomin se povečuje s kvadratom števila vhodnih točk v programu FFT. Pri 1024 vhodnih točkah je potrebnih  $\approx 2,6$  MB, pri 4096 pa že  $\approx 42$  MB spomina za izračun kvadratične bikoherence [3].

Izbira okna pomeni naslednjo pomembno odločitev. Na podlagi numeričnih simuliranj se je izkazalo [2] in [3], da je v primeru pretakanja moči za zaznavanje KSF najprimernejše okno Hammingovo, sledi pa mu Hanningovo. Pravokotno okno se je v primeru s pretakanjem moči izkazalo za neprimerno. Slike 10, 11 in 12 prikazujejo kvadratično bikoherenco signala, sestavljenega iz treh harmonikov, pri čemer je tretji posledica kvadratičnega sklapanja faz prvega in drugega. Kvadratična bikoherenca je izračunana z 64 vhodnimi točkami v programu FFT, zaradi česar prihaja do pretakanja moči na sosednje frekvence, faze kosinusov pa so v segmentu sicer konstantne, med segmenti pa so naključne in so generirane z naključnim generatorjem s konstantno gostoto naključne spremenljivke. Podatki o generiranem signalu so podani s preglednico 3.

Preglednica 3. Podatki o generiranih signalih

Table 3. Generated signals

Harmonska $i$ Harmonic $i$	Amplituda $A_i$ Amplitude $A_i$	Frekvenca ( $f_i$ ) Hz Frequency ( $f_i$ ) Hz	Faza $\phi_i$ Phase $\phi_i$
1.	10	0,125	$[0, 2\pi]$
2.	10	0,250	$[0, 2\pi]$
3.	10	0,375	$\phi_1 + \phi_2$
Šum $g(n)$ : Gaussova gostota porazdelitve naključne spremenljivke, srednja vrednost 0, varianca 5,0 Noise: Gaussian density of random variable, mean value 0, variance 5,0 Frekvenca vzorčenja: $f_s = 1/\Delta t = 1\text{Hz}$ Sampling frequency: $f_s = 1/\Delta t = 1\text{Hz}$			

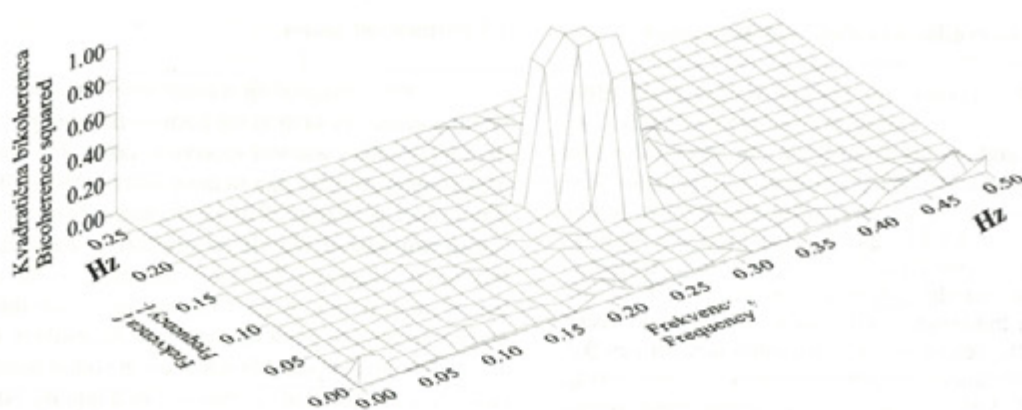
### 1.3 Estimation issues

When estimating second order spectra a number of parameters such as the number of input points in the FFT routine, window selection, noise, the number of segments etc. play part in the quality of the estimate. The proper selection of this parameters is even more important and difficult to predict if calculating bicoherence squared. The basic parameter is the number of input points in the FFT routine. From the frequency resolution point of view, it is desirable to input as much points as possible while on the other hand this reduces the number of segments. For a quality estimation of the bicoherence squared, the minimum number of segments should be at least 60 [2] and [3]. The importance of having sufficient number of segments is presented in Figures 7 to 9. Bicoherences squared of a cosinoidal signal (7) were calculated using 256 input points in the FFT routine and rectangular window. The signal used is defined in Table 3.

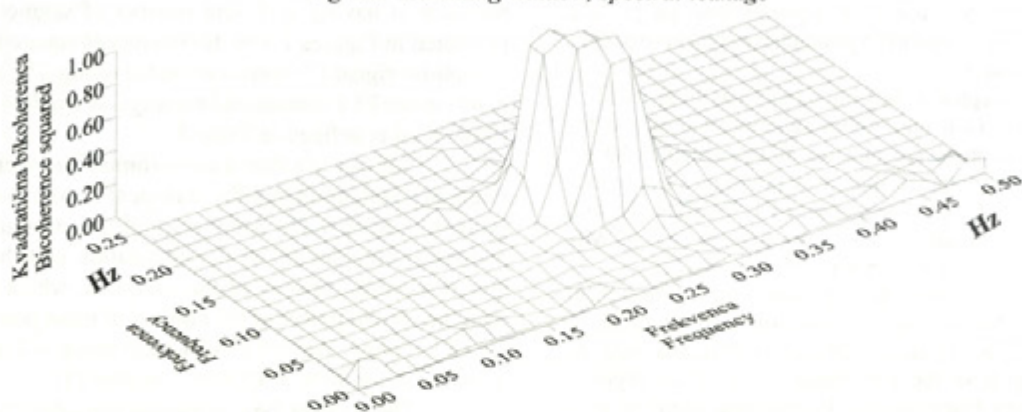
We can see that a compromise between the frequency resolution and the statistical stability of the estimate must be made. Another limiting factors are the numerical complexity of the calculation and the required memory capacity of the computer, which rises with the second power of the number of input points in the FFT routine. While for 1024 input points  $\approx 2.6$  MB is required, for 4096  $\approx 42$  MB is needed [3].

The window type is another important factor. Based upon the numerical simulations [2] and [3], the Hamming window followed by Hanning window seemed the most efficient in resolving QPC. It was found that in the presence of the spectral leakage rectangular window was completely inefficient. Figures 10, 11 and 12 present bicoherence squared of a signal, composed of three cosines, where the third one is the result of QPC between the first and the second cosines. Bicoherence squared were calculated using 64 input points in the FFT routine which resulted in the spectral leakage. Generated signal is defined in Table 3.

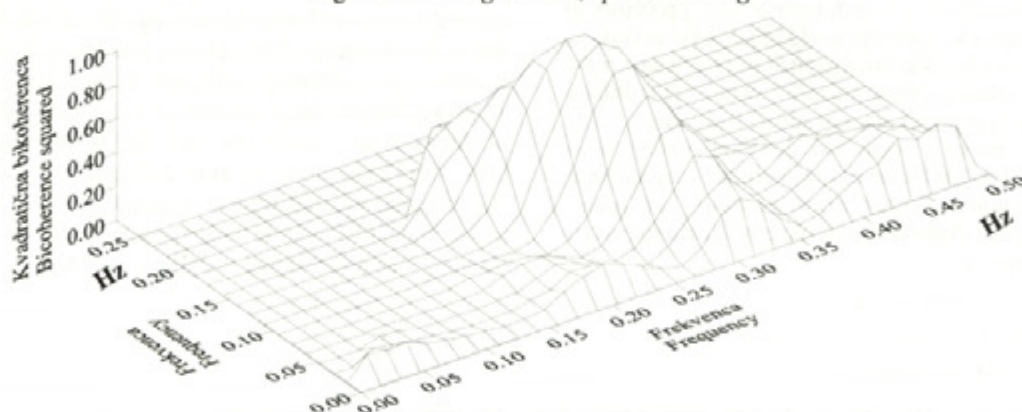




Sl. 10. *Hammingovo okno, pretakanje moči*  
Fig. 10. *Hamming window, spectral leakage*



Sl. 11. *Hanningovo okno, pretakanje moči*  
Fig. 11. *Hanning window, spectral leakage*



Sl. 12. *Pravokotno okno, pretakanje moči*  
Fig. 12. *Rectangular window, spectral leakage*

## 2 PRIMER UPORABE

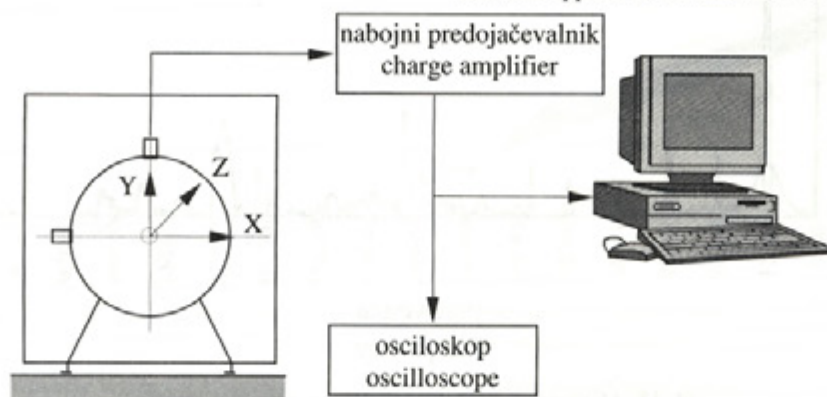
Kvadratično bikoherenco smo uporabili za analizo nihanj pralne skupine pralnega stroja. V skladu s prevzemnim preskusom smo merili pospeške pralne grupe v navpični in vodoravni smeri (sl. 13). Z uporabo digitalnega filtra smo odrezali vse frekvence, višje od 300 Hz. Podrobnosti o meritvah so podane v [3] in [15]. Najprej smo izračunali močnostne spektre obeh pospeškov (sl. 14 in 15). Močnostne spektre smo izračunali s 4096 vhodnimi točkami v programu FFT, kar pri izbrani frekvenci vzorčenja 2000 Hz definira frekvenčno resolucijo 0,488 Hz. Pri dolžini meritve 500000

## 2 PRACTICAL EXAMPLE

Bicoherence squared was used to analyze the accelerations of the washing machine's washing part. Accelerations were measured in accordance with the acceptance test in both horizontal and vertical directions, using sampling frequency of 2000 Hz (Fig. 13). Digital filter was used to cut off frequencies above 300 Hz. The detail description of the measurements can be found in [3] and [15]. Power spectra of accelerations are presented in Figures 14 and 15. Power spectra have been calculated by using 4096 input points in the FFT

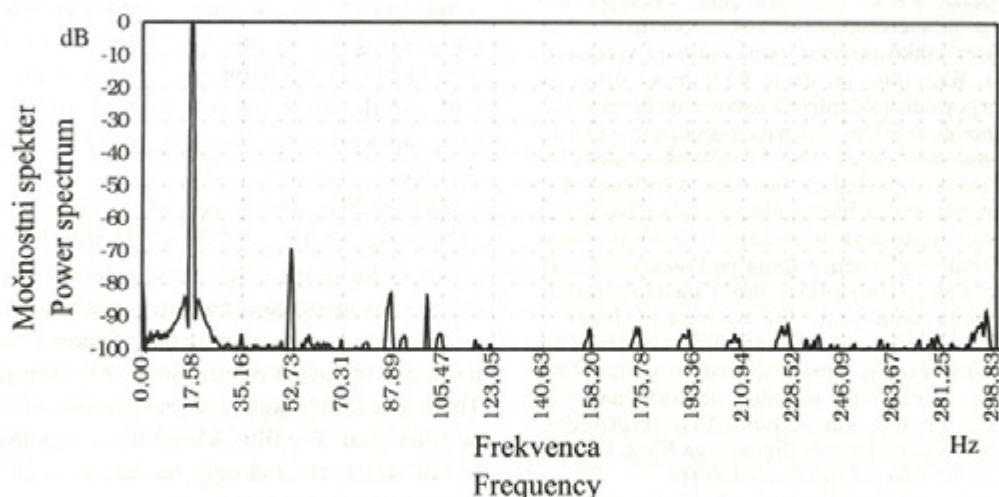
točk smo z uporabo 5% prekritja dobili 128 segmentov, na katerih smo izračunali povprečno vrednost močnostnega spektra. Uporabljeno je bilo Hammingovo okno.

routine, giving the frequency resolution of 0.488 Hz. With the data length of 500000 points, overlapping of 5% was used to obtain 128 segments. Hamming window was applied in the time domain.



Sl. 13. Shema merilne verige pralnega stroja

Fig. 13. The experiment all set-up



Sl. 14. Močnostni spekter pospeškov v vodoravni smeri

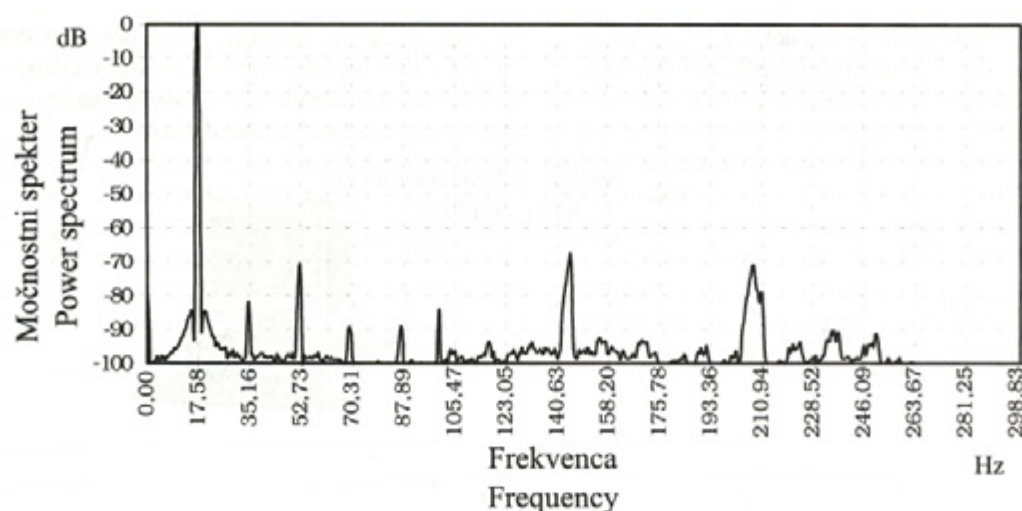
Fig. 14. Power spectrum of horizontal accelerations

Iz močnostnih spektrov je razvidno, da ima največjo moč frekvenca 17,58 Hz, ki ustreza osnovni harmonski oz. vrtilni hitrosti ožemanja ( $1054,8 \text{ min}^{-1}$ ). Lepo je viden tudi tretji harmonik s frekvenco 52,73 Hz, vzbujan s trikrakim nosilom bobna, ki pa je že za 70 dB nižji od osnovne harmonske. Na sliki 15 sta vidna tudi skoka pri frekvencah 145,02 ter 208,01 Hz. Vzroka teh dveh skokov nista znana.

Kvadratično bikoherenco smo izračunali s 1024 vhodnimi točkami v programu FFT, kar pri izbrani frekvenci vzorčenja 2000 Hz definira frekvenčno resolucijo 1,95 Hz. Z uporabo 5% prekritja smo dobili 513 segmentov, na katerih smo izračunali povprečno vrednost kvadratične bikoherence. Uporabljeno je bilo Hammingovo okno, ki se je pri zaznavi KSF izkazalo za najučinkovitejše. Kvadratični bikoherenci pospeškov v vodoravni in navpični smeri sta prikazani na slikah 16 in 17. Na sliki 16 lahko vidimo, da je kvadratična bikoherenca sestavljena iz kopice "igel", ki so razporejene po večjem delu NT, vrednosti pa so razmeroma velike (do 0,75). Te "igle" so verjetno v večjem delu posledica občutljivosti cenilke kvadratične

In the horizontal and vertical direction, the wringing frequency of 17.58 Hz is clearly visible. The third harmonic at 52.73 Hz, generated by three-arm support of the drum, has already 70 dB lower power. In the figure of the power spectrum of vertical accelerations, Figure 15, peaks at 145.02 and 208.01 Hz can be observed. The cause of these two peaks is unknown. All other frequencies have significantly lower power values.

Bicoherences squared of horizontal and vertical accelerations were calculated using 1024 points per segment (input FFT size), giving frequency resolution of 1.95 Hz. Overlapping of 5% was used to obtain 513 segments. Because of its ability to resolve QPC peaks, Hamming window was applied in time domain. Bicoherences squared of horizontal and vertical acceleration are presented in Figures 16 and 17. It can be clearly seen in Figure 16, that bicoherence squared is composed of a number of large peaks, spread over the most part of the IT. These peaks are probably in the most part caused by the estimate's sensitivity to the di-



Sl. 15. Močnostni spekter pospeškov v navpični smeri  
Fig. 15. Power spectrum of vertical accelerations

bikoherence na deljenje z majhnimi števili in ne kažejo dejanske ocene o KSF. Realnejšo sliko o KSF podaja kvadratična bikoherenca pospeškov v vodoravni smeri (sl. 17), kjer lahko opazimo štiri najvišje vrednosti (pregl. 4). Razvidno je, da je 63% moči drugega harmonika posledica sklapljanja osnovnega harmonika. Tretji harmonik, ki je lepo viden na močnostnih spektrih, je le deloma samostojen. Kar 51 odstotkov moči tega nastane kot posledica faznega sklapljanja faz drugega in osnovnega harmonika, 49 odstotkov moči pa povzročijo lopatice za mešanje perila znotraj bobna. Peti harmonik v glavnem vzbuja petkraka jermenica pogona bobna, 31 odstotkov moči nastane zaradi kvadratičnega sklapljanja faz tretjega in drugega harmonika. Signal torej vsebuje kvadratične nelinearnosti, zato je dinamski sistem nelinearen. Kvadratična bikoherenca je tudi v območju nad 300 Hz različna od nič, kar je posledica amplitudne karakteristike uporabljenega digitalnega filtra, ki pade na vrednost nič šele pri frekvenci 400 Hz.

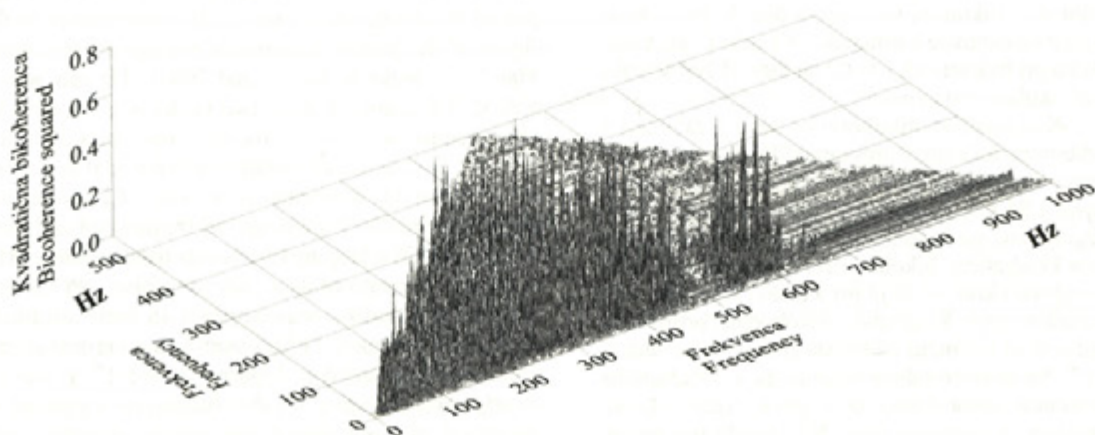
### 3 SKLEP

Področja uporabe bispektrov so zelo različna. Tu sta omenjena le dva, in sicer možnost izločitve Gaussovega šuma iz meritve ter zaznavanje KSF v

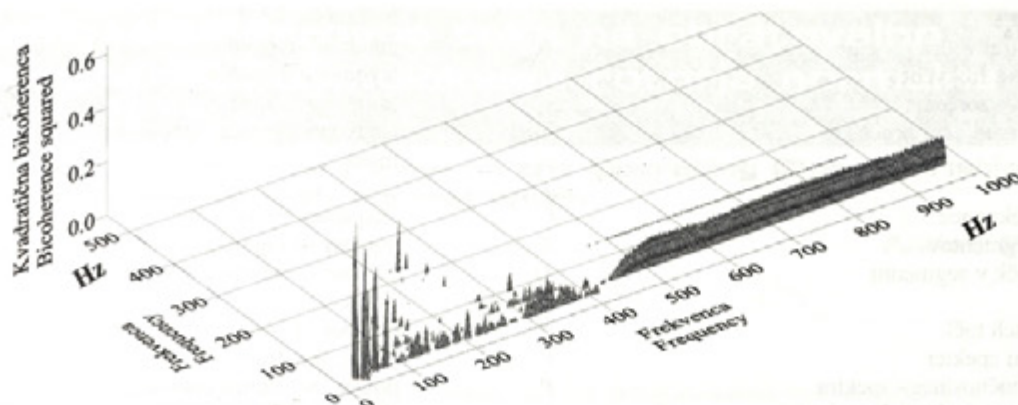
vision by small numbers and do not represent the true picture of QPC. Bicoherence squared of vertical accelerations (Fig. 17) has only four distinct peaks, Table 4. 63% of the second harmonic's power is due to the QPC of the first harmonic. 51% of the third harmonic's power is caused by the QPC of the first and second harmonic, while 49% of the power is caused by three arm support of the drum. Similarly 41% of the fourth and 31% of the fifth harmonic's power is due to the QPC. These values confirm that the process involved is not linear and that quadratic nonlinearities are present. In both figures a "wall" in the higher frequency domain above 300 Hz is present. This is due to the magnitude characteristic of the digital filter used. The filter's magnitude response starts to fall at 300 Hz and only reaches values close to zero at 400 Hz.

### 3 CONCLUSION

The applications of bispectra can be found in a variety of areas. Here only two applications are



Sl. 16. Kvadratična bikoherenca pospeškov v vodoravni smeri  
Fig. 16. Bicoherence squared of horizontal accelerations



Sl. 17. Kvadratična bikoherenca pospeškov v navpični smeri

Fig. 17. Bicoherence squared of vertical accelerations

Preglednica 4. Največje vrednosti kvadratične bikoherence pospeškov v navpični smeri

Table 4. The largest values of bicoherence squared of vertical accelerations

Kvadratična bikoherenca Bicoherence squared	Bifrekvenca Hz Bifrequency Hz	Vsota frekvenc Hz Sum frequency Hz	Harmonska Harmonic
0,63	(17,58, 17,58)	35,16	2.
0,51	(35,16, 17,58)	52,73	3.
0,41	(52,73, 17,58)	70,31	4.
0,31	(52,73, 35,16)	87,89	5.

signalu. Zaradi relativno slabih statističnih lastnosti cenilke bispektra se je razvoj usmeril na poševnostno funkcijo bispektra pri naključnih procesih ter kvadratično bikoherenco pri harmonskih procesih. Sam izračun bispektra oziroma njegovih normaliziranih izvedenk je bistveno bolj zahteven od izračuna spektrov drugega reda. Osnovni vplivi na izračun, npr. izbira okna ter število segmentov so tu bistveno bolj izraženi in lahko bistveno vplivajo na izračun. Število vhodnih točk v programu FFT določimo iz pričakovanega frekvenčnega obsega procesa. Pri premajhnem številu točk lahko zaradi pretakanja moči na sosednje točke dobimo zelo nezanesljive rezultate. Po drugi strani pa moramo zaradi statističnih lastnosti cenilke kvadratične bikoherence imeti vsaj 60 segmentov za izračun povprečne vrednosti. Tudi sama interpretacija kvadratične bikoherence je relativno zahtevna. Vpliv deljenja z majhnimi števili lahko privede do množstva "igel" neenakomernih vrednosti ter razporejenih po večjem delu NT. Do tega pojava pogosto prihaja pri signalih kaotičnih atraktorjev [16] in [17] in je delno lahko tudi posledica občutljivosti cenilke kvadratične bikoherence na deljenje z majhnimi števili. V teh primerih se je izkazalo, da cenilka bispektra podaja realnejšo sliko o kvadratičnem sklapljanju faz [3].

mentioned; filtering out the Gaussian noise from the measurement and detection of QPC. Due to the relatively poor statistical qualities of the bispectrum estimate, normalized versions such as skewness function for stochastic processes and bicoherence squared for harmonic processes are used. The estimation of the bispectra is significantly more complex than the estimation of second order spectra. The proper selection of basic parameters is here even more important and difficult to predict. The number of the input points in the FFT routine should be determined from the spectral bandwidth and if small number of input points is used, spectral leakage can lead to unreliable estimate. On the other hand the statistical stability of the bicoherence's squared estimate requires at least 60 segments. The interpretation of the result can be also difficult. The division by small numbers can lead to the large number of peaks, spreaded over the most part of the IT. This is often the case when dealing with chaotic attractors [16] and [17]. It has been found that in these cases, the bispectrum's estimate gives more reliable information on the QPC [3].

## 4 UPORABLJENE OZNAČBE

## 4 NOTATION

amplituda  
kvadratična bikoherenca  
bispekter  
cenilka bispektra  
kumulant tretjega reda  
Eulerjevo število 2,718281...

$A$   
 $b^2$   
 $B$   
 $\hat{B}$   
 $c_3$   
 $e$

amplitude  
bicoherence squared  
bispectrum  
bispectrum estimate  
third-order cumulant  
Euler's number 2,718281...

frekvenca	$f$	frequency
največja frekvenca	$f_{\max}$	maximal frequency
Nyquistova frekvenca	$f_N$	Nyquist's frequency
frekvenca vzorčenja	$f_s$	sampling frequency
Gaussov naključni proces	$g(n)$	Gaussian stochastic process
indeks	$i$	index
$\sqrt{-1}$	$j$	$\sqrt{-1}$
indeks frekvenca	$k$	frequency index
število segmentov	$K$	number of segments
število točk v segmentu	$M$	number of points in a segment
indeks	$n$	index
število vseh točk	$N$	number of points
močnostni spekter	$P$	power spectrum
cenilka močnostnega spektra	$\hat{P}$	power spectrum's estimate
poševnostna funkcija bispektra	$\hat{s}^2$	skewness function
proces v časovni domeni	$x(n)$	time domain process
proces v časovni domeni	$y(n)$	time domain process
proces v frekvenčni domeni	$X$	frequency domain process
kompleksno konjugirano število številu $X$	$X^*$	complex conjugate of $X$
časovni inkrement	$\Delta t$	time increment
faza	$\phi$	phase

5 LITERATURA  
5 REFERENCES

- [1] Nikias, C.H., Petropulu, A.P.: Higher-order spectra analysis, a nonlinear processing framework, Prentice Hall, 1993.
- [2] Fackrell, J.W.: Bispectral analysis of speech signals, Doktorska disertacija, University of Edinburg, September 1996.
- [3] Simonovski, I.: Uporaba spektrov tretjega reda pri analizi nelinearnih mehanskih nihanj, Magistrsko delo, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, 1998.
- [4] Boltežar, M., Kuhelj, A.: Higher-order spectra to identify a complex nonlinear mechanical system, 1994 GAMM Wissenschaftliche Jahrestagung, TU Braunschweig, Abstracts p.61, 4 - 8 April 1994.
- [5] Boltežar, M., Kuhelj, A.: Uporaba spektrov višjega reda pri eksperimentalnem pristopu k nelinearni dinamiki, Kuhljevi dnevi '94, Šmarješke toplice, 22.-23.9.1994, Zbornik del, pp. 259 - 266.
- [6] Hinich, M. J.: Testing for gaussianity and linearity of a stationary time series, Journal of Time Series Analysis, Vol. 3, 1982, No. 3, pp. 169 - 176.
- [7] Jouny, I., Garber, F.D., Moses, R.L.: Radar target identification using bispectrum: A comparative study, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 31, 1995, No. 1, pp. 69 - 77.
- [8] Haubrich, R.A.: Earth Noise, 5 to 500 Milicycles per second, Journal of Geophysical Research, Vol. 10, 1965, No. 6, pp. 1415 - 1427.
- [9] Elgar, S., Sebert, G.: Statistic of bicoherence and biphas, Journal of Geophysical Research, Vol. 94, 1989, No. C8, pp. 10993 - 10998.
- [10] Chow, T.W.S., Fei, G.: Three phase induction machines asymmetrical faults identification using bispectrum, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 10, 1995, No. 4, pp. 688 - 693.
- [11] Fackrell, J.W., White, P.R., Hammond, J.K., Pinnington, R. J., Parsons, A.T.: The interpretation of the bispectra of vibration signals-I. Theory, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 9, 1995, No. 3, pp. 257 - 266.
- [12] Fackrell, J.W., White, P.R., Hammond, J.K., Pinnington, R. J., Parsons, A.T.: The interpretation of the bispectra of vibration signals-II. Experimental results and applications, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 9, 1995, No. 3, pp. 267 - 274.
- [13] Kim, Y.C., Powers, E.J.: Digital bispectral analysis and its applications to nonlinear wave interactions, IEEE Transactions on Plasma Science, Vol. PS-7, 1979, No. 2, pp. 120 - 131.
- [14] Chandran, V., Elgar, S.L.: Mean and variance of estimates of the bispectrum of a harmonic random process-an analysis including leakage effects, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 39, 1991, No. 12.
- [15] Jakšič, N.: Analiza nihanja nelinearnega centrifugalno vzbujanega ravninskega sistema, Magistrsko delo, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, 1997.
- [16] Kim, K.B., Kim, S.Y.: Chaos from van der Pol-Duffing oscillator: Bispectral analysis, Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 65, 1996, No. 7, pp. 2323 - 2332.
- [17] Lipton, J. M., Dabke, K.P., Lakshmanan, M.: Bispectral properties of the simplest dissipative nonautonomous chaotic circuit, International Journal of Bifurcations and Chaos, Vol. 6, 1996, No. 12A, pp. 2419 - 2425.

Naslovi avtorjev: mag. Igor Simonovski, dipl. inž.  
doc. dr. Miha Boltežar, dipl. inž.  
prof. dr. Anton Kuhelj, dipl. inž.  
Fakulteta za strojništvo  
Univerze v Ljubljani  
Aškerčeva 6  
1000 Ljubljana

Authors' Addresses: Mag. Igor Simonovski, Dipl. Ing.  
Doc. Dr. Miha Boltežar, Dipl. Ing.  
Prof. Dr. Anton Kuhelj, Dipl. Ing.  
Faculty of Mechanical Engineering  
University of Ljubljana  
Aškerčeva 6  
1000 Ljubljana, Slovenia

Prejeto: 15.6.1998  
Received:

Sprejeto: 27.1.1999  
Accepted: