

# Vključevanje volumskih sil v analizo po metodi končnih elementov

Christian Glenk\* – Florian Hüter – Daniel Billenstein – Frank Rieg  
Univerza v Bayreuthu, Fakulteta za inženirstvo, Nemčija

Analiza po metodi končnih elementov (MKE) je danes dobro uveljavljena numerična metoda za mehansko analizo konstrukcijskih komponent, ki jih ni mogoče opisati dovolj natančno z analitičnimi pristopi. Kljub temu, da se računske zmogljivosti nenehno povečujejo, so izboljšave učinkovitosti računskih metod in njihova implementacija na računalniku ena prednostnih razvojnih nalog na tem področju.

Upoštevanje volumskih sil, kot je sila teže, je ključno za analizo napetosti v mnogih tehničnih aplikacijah. V članku je predstavljen učinkovit pristop za točen izračun rezultante sile teže v vozliščnih elementov trodimenzionalnega kontinuuma.

Metoda temelji na faktorizaciji Jacobijeve determinante, kjer se parcialni odvodi oblikovnih funkcij ločijo od kartezičnih koordinat vozlišč. Izhodiščni volumski integral je tako mogoče razdeliti v vsoto integralov, ki niso odvisni od kartezičnih koordinat vozlišč, te pa so v seštevanju upoštevane s predfaktorji. Ker so ti integrali odvisni samo od oblikovnih funkcij, so specifični za posamezne elemente, kot je denimo kvadratični tetraeder. Integrale je zato treba izračunati samo enkrat, izračunane numerične vrednosti pa je mogoče shraniti v razpredelnice programa za analizo po metodi končnih elementov. Pri računanju rezultante sile teže v vozliščnih med analizo po MKE tako odpade računanje Gaussove kvadrature formule, s čimer se zmanjša zahtevnost in skrajša čas računanja. Integrale je mogoče točno izračunati vnaprej za točno določitev sil v vozliščnih brez podaljšanja časa računanja v programu za MKE.

Izdelan je bil testni program za primerjavo učinkovitosti obeh integracijskih metod. Podana je primerjava časa računanja za standardno integracijo z Gaussovo kvadrature formulo in za integracijo po metodi faktorizacije. Pri slednji ni bil upoštevan čas računanja integralov, saj je numerična integracija izločena iz izvajanja programa. Gaussova kvadratura je bila opravljena z različnimi stopnjami integracije. Vsi testi so pokazali, da je računski čas krajši pri faktorizacijski metodi in ta prednost je še posebej izrazita pri višjih stopnjah integracije. Ugotovitev je mogoče pojasniti z dejstvom, da je višja stopnja numerične integracije povezana z občutno večjim številom točk, ki jih je treba upoštevati, kar vpliva na računski čas. Ta čas je pri metodi faktorizacije konstanten, saj je numerična integracija izločena iz izvajanja programa.

Faktorizacijsko metodo je mogoče uporabiti za katerikoli element kontinuuma. Uporabnost metode za različne vrste končnih elementov je predstavljena na primeru analize napetosti v neobremenjenem konzolnem nosilcu z linearnimi in kvadratičnimi heksaedri in tetraedri. Kakovost izračunanega maksimalnega pomika je odvisna od vrste in od števila končnih elementov. Pomik končne točke konzolnega nosilca je bil izračunan tudi analitično z Bernoullijevo teorijo nosilcev in primerjava je pokazala, da je faktorizacijska metoda uporabna za velike strukture, sestavljene iz različnih končnih elementov.

Predlagana metoda ni omejena na računanje sile teže in je uporabna tudi za računanje masne matrike ter drugih volumskih sil v analizi po MKE. Metodo je mogoče tudi posplošiti za dvodimenzionalne elemente kontinuuma.

**Ključne besede:** analiza po metodi končnih elementov, volumska sila, sila teže, numerična integracija, Gaussova kvadratura, računska zahtevnost