STROJNIŠKI VESTNIK

LETNIK X LJUBLJANA, V APRILU 1964 ŠTEVILKA 1/2

DK 539.4.013

Deformacije in napetosti pri osno simetričnih tangencialnih obremenitvah na valju

MARKO ŠKERLJ

V razpravi so obravnavana napetostna stanja na polnem in votlem valju pri tangencialni obremenitvi v aksialni smeri na zunanjem obodu valja. Prikazan je izračun razmerja med premerom in dolžino valja, pri katerem se zunanji obod valja ne deformira. Rezultati so osvetljeni z računskimi primeri.

Uvod

Misel za obravnavanje takega problema se je porodila pri poskusih za eksaktno računanje termičnih napetosti v valju, na katerega je v vročem stanju nasajena cev, kakor tudi računanje napetosti, ki se pojavljajo v zunanji cevi pri ohlajanju. Jasno je, da napetosti in deformacije v enem in drugem telesu ne bodo odvisne samo od radialne (prečne) kontrakcije, ker nastaja pri ohlajanju tudi aksialna (vzdolžna) kontrakcija zunanje cevi. To skrajšanje zunanje cevi ne bi vplivalo na notranje telo, če bi suponirali, da med obema telesoma ni nikakršnega trenja. Ta predpostavka pa je nerealna, ker je trenje neogibna posledica prečne kontrakcije. To dokazujejo tudi številni primeri v strojni tehniki, kjer je vroče nasajena vez enostaven in zanesljiv način vezave dveh elementov, pri katerih se obremenitve prenašajo samo s trenjem na stičnih ploskvah.

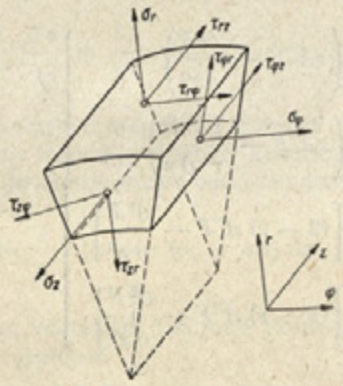
Trenje zaradi vzdolžne kontrakcije deluje kot tangencialna obremenitev v aksialni smeri na zunanjem robu notranjega telesa in na notranjem robu zunanjega. To razpravo smo omejili samo na omenjeno tangencialno obremenitev. Napetosti in deformacije zaradi radialne obremenitve so v literaturi že delno obdelane. Sicer pa je vedno mogoče take probleme reševati s superpozicijo, da se torej na koncu posamezni rezultati seštevajo.

Žal v literaturi ni mogoče zaslediti podatkov o porazdelitvi tornih sil v aksialni smeri pri podobnih problemih. V tej smeri je še cela vrsta odprtih vprašanj, tako s teoretičnega kakor tudi s praktično eksperimentalnega vidika. Zaradi tega smo primorani suponirati pri naših primerih poljuben potek tangencialnih obremenitev, kar pa ne zmanjšuje veljavnosti enačb, ker so rešitve splošne in uporabne za vsako obremenitev.

Omeniti je še, da je problem zanimiv tudi za študij železobetona. Iz rezultatov je delno razvidno obnašanje betonskega železa, ki je po betoniranju tudi obremenjeno s tangencialnimi obremenitvami v osni smeri po zunanjem obodu.

Splošne enačbe za napetosti in deformacije

Kakor je omenjeno v uvodu, bomo obravnavali rotacijsko simetrično stanje napetosti oziroma deformacij na rotacijsko simetričnem telesu (poln ali votel valj). Najenostavnejše je, če vzamemo semipolarne koordinate r, φ in z ter os valja postavimo v os z.



Splošne elastostatične ravnotežne enačbe za izbrani koordinatni sistem se glasijo [1]

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + X_r = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + X_z = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + 2\frac{\tau_{r\varphi}}{r} + X_\varphi = 0$$

Če označimo pomik v smeri r osi z u, v smeri φ osi z v in v smeri z osi z w, so deformacije podane z izrazi:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \qquad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{r\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r},$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, \qquad \gamma_{z\varphi} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}$$

V našem primeru se zaradi osne simetrije navedene enačbe poenostavijo (ker so obremenitve neodvisne od φ, so nični vsi odvodi po φ kakor tudi $\tau_{r\varphi}$ in $\tau_{\varphi z}$). Prav tako lahko zanemarimo volumenske sile X_r, X_z in X_φ, ki v našem primeru — kakor tudi v večini drugih — niso pomembne. Nove enačbe imajo obliko

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0 \\ &\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Komponente deformacij so

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \tag{1 a}$$

Posamezne napetosti so [2]

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu \Delta'' F - \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\right) \\ \sigma_\varphi &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu \Delta'' F - \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right) \\ \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\nu)\,\Delta'' F - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right] \\ \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r}\left[(1-\nu)\,\Delta'' F - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right] \end{aligned}\right\} \quad \nu = \text{Poissonovo število} \tag{2}$$

V teh enačbah pomeni F tako imenovano napetostno funkcijo, ki zadošča bipotencialni enačbi

$$\Delta''\Delta'' F = 0$$

kjer operator Δ'' pomeni skrajšani izraz za

$$\Delta'' = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Bipotencialna enačba napetostne funkcije v razviti obliki je torej

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right) = \Delta''\Delta'' F = 0 \tag{3}$$

ali

$$\frac{\partial^4 F}{\partial r^4} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3 F}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3 F}{\partial r\,\partial z^2} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial r^2\,\partial z^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial z^4} = 0 \tag{4}$$

Predpostavimo, da je rešitev te diferencialne enačbe četrtega reda podana v obliki

$$F = R(r) \,.\, Z(z)$$

kjer pomenita $R(r)$ funkcijo, ki je odvisna samo od koordinate r, in $Z(z)$ funkcijo, odvisno samo od koordinate z.

Ker je zelo primerna pot za predstavljanje poljubnih obremenitev na telesu ta, da jih razvijemo v Fourierovo vrsto, ki vsebuje funkcije $\sin z$ oziroma $\cos z$, bomo tudi našo funkcijo $Z(z)$ pisali v obliki

$$Z(z) = \frac{\sin}{\cos}\,\lambda z \text{ (simbol } \frac{\sin}{\cos} \text{ pomeni sin ali cos)}$$

Tako se bo suponirana rešitev diferencialne enačbe glasila

$$F = R(r)\,\frac{\sin}{\cos}\,\lambda z \tag{5}$$

Izraz 5 vstavimo v enačbo 4 in imamo po krajšanju s $\sin \lambda z$ in ureditvi

$$R'''' + \frac{2}{r}R''' - R''\left(\frac{1}{r^2} + 2\lambda^2\right) + R'\left(\frac{1}{r^3} - \frac{2\lambda^2}{r}\right) + \lambda^4 R = 0$$

V tem izrazu pomenijo črtice odvode po r.

Dobljeno enačbo pomnožimo z r^4 in dobimo končno

$$r^4 R'''' + 2r^3 R''' - (r^2 + 2\lambda^2 r^4)\,R'' + (r - 2\lambda^2 r^3)\,R' + \lambda^4 r^4 R = 0 \tag{6}$$

To je diferencialna enačba Besselovega tipa. Splošna rešitev te enačbe je [4]

$$R = [A\,I_0(\lambda r) + B\,\lambda r\,I_1(\lambda r) + C\,K_0(\lambda r) + D\lambda r\,K_1(\lambda r)]$$

kjer pomenijo

$I_0(\lambda r)$ in $I_1(\lambda r)$ ... Besselovo funkcijo prve vrste, imaginarnega argumenta 0-tega in 1-ega reda,

$K_0(\lambda r)$ in $K_1(\lambda r)$ ... Besselovo funkcijo druge vrste, imaginarnega argumenta 0-tega in 1-ega reda ter

A, B, C in D ... integracijske konstante.

Ko tako dobljen izraz za $R(r)$ vstavimo v enačbo 5, dobimo končno napetostno funkcijo

$$F = [A\,I_0(\lambda r) + B\,\lambda r\,I_1(\lambda r) + C\,K_0(\lambda r) + D\,\lambda r\,K_1(\lambda r)]\,\frac{\sin}{\cos}\,\lambda z \tag{7}$$

Kot naslednji korak tvorimo izraze, ki so potrebni za vstavljanje v enačbe 2. S pomočjo teh dobimo enačbe za napetosti.

Z enkratnim odvajanjem napetostne funkcije po koordinati r in po ureditvi dobimo

$$\frac{\partial F}{\partial r} = [B \lambda^2 r I_0 (\lambda r) + A \lambda I_1 (\lambda r) - D \lambda^2 r K_0 (\lambda r) - - C \lambda K_1 (\lambda r)] \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \lambda z$$

Se enkratno odvajanje da

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = [(A + B) \lambda^2 I_0 (\lambda r) + \left(B \lambda^2 r - A \frac{\lambda}{r}\right) I_1 (\lambda r) + + (C - D) \lambda^2 K_0 (\lambda r) + \left(D \lambda^2 r + C \frac{\lambda}{r}\right) K_1 (\lambda r)] \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \lambda z$$

Dvakratno odvajanje po koordinati z pa da

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = - \lambda^2 [A I_0 (\lambda r) + B \lambda r I_1 (\lambda r) + C K_0 (\lambda r) + + D \lambda r K_1 (\lambda r)] \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \lambda z$$

Laplaceov operator ima po ureditvi naslednjo obliko

$$\Delta'' F = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 2 \lambda^2 [B I_0 (\lambda r) - - D K_0 (\lambda r)] \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \lambda z$$

Z uvajanjem teh izrazov v enačbe 2 dobimo enačbe za napetosti, ki jih pišemo v obliki neskončnih vrst tako, kakor se pozneje pojavljajo zunanje obremenitve razvite v Fourierove vrste.

$$\sigma_r = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^3 \left\{ \left[\frac{1}{\lambda r} I_1 (\lambda r) - I_0 (\lambda r)\right] A_n + + [(2 \nu - 1) I_0 (\lambda r) - \lambda r I_1 (\lambda r)] B_n - \left[K_0 (\lambda r) + + \frac{1}{\lambda r} K_1 (\lambda r)\right] C_n - [(2 \nu - 1) K_0 (\lambda r) + + \lambda r K_1 (\lambda r)] D_n \right\} \begin{matrix}\cos\\ -\sin\end{matrix} \lambda z \quad (8)$$

$$\sigma_\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^3 \left[- \frac{1}{\lambda r} I_1 (\lambda r) A_n + (2 \nu - 1) I_0 (\lambda r) B_n + + \frac{1}{\lambda r} K_1 (\lambda r) C_n - (2 \nu - 1) K_0 (\lambda r) D_n \right] \begin{matrix}\cos\\ -\sin\end{matrix} \lambda z \quad (9)$$

$$\sigma_z = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^3 \{ I_0 (\lambda r) A_n + [2 (2 - \nu) I_0 (\lambda r) + + \lambda r I_1 (\lambda r)] B_n + K_0 (\lambda r) C_n - [2 (2 - \nu) K_0 (\lambda r) - - \lambda r K_1 (\lambda r)] D_n \} \begin{matrix}\cos\\ -\sin\end{matrix} \lambda z \quad (10)$$

$$\tau_{rz} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^3 \{ I_1 (\lambda r) A_n + [\lambda r I_0 (\lambda r) + + 2 (1 - \nu) I_1 (\lambda r)] B_n - K_1 (\lambda r) C_n + [- \lambda r K_0 (\lambda r) + + 2 (1 - \nu) K_1 (\lambda r)] D_n \} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \lambda z \quad (11)$$

$$\lambda = \frac{n \pi}{l}$$

Enačbe 8 do 11 predstavljajo splošno rešitev za osno simetrične probleme na valju. Kadar koli imamo opravka s polnim valjem, postanejo vrednosti funkcij K_0 in K_1 za $r = 0$ singularne (dosežejo neskončne vrednosti). Zato postavimo konstanti $C = D = 0$ ter ostaneta v enačbah samo člena s konstantama A in B.

Da je splošna rešitev popolna, moramo najti še končne izraze za pomike. V ta namen uporabimo Hookov zakon za prostorsko stanje napetosti.

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu (\sigma_\varphi + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_r + \sigma_\varphi)] \quad (12)$$

Z integriranjem enačb 12 dobimo lahko oba pomika u in w. Pomik v v smeri koordinatne osi φ je odveč, ker je obremenitev osno simetrična.

$$u = \frac{1}{E} \int [\sigma_r - \nu (\sigma_\varphi + \sigma_z)] \, dr$$

V ta izraz vstavimo dobljene vrednosti za napetosti in jih uredimo

$$u = \frac{1 + \nu}{E} \lambda^3 \int \sum_{n=1}^{\infty} \left[- I_0 (\lambda r) A_n + + \frac{1}{\lambda r} I_1 (\lambda r) A_n - I_0 (\lambda r) B_n - \lambda r I_1 (\lambda r) B_n - - K_0 (\lambda r) C_n - \frac{1}{\lambda r} K_1 (\lambda r) C_n + K_0 (\lambda r) D_n - - \lambda r K_1 (\lambda r) D_n \right] \begin{matrix}\cos\\ -\sin\end{matrix} \lambda z \, dr$$

Ko izvršimo nakazano integriranje, dobimo

$$u = \frac{1 + \nu}{E} \lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} [- I_1 (\lambda r) A_n - \lambda r I_0 (\lambda r) B_n + + K_1 (\lambda r) C_n + \lambda r K_0 (\lambda r) D_n] \begin{matrix}\cos\\ -\sin\end{matrix} \lambda z \quad (13)$$

Vse operacije integriranja so izvedene s pomočjo formul za integriranje Besselovih funkcij [3].

Za pomik w v smeri koordinatne osi z uporabimo drugo enačbo (12)

$$w = \frac{1}{E} \int [\sigma_z - \nu (\sigma_r + \sigma_\varphi)] \, dz$$

Ko vstavimo ustrezne vrednosti za napetosti ter integriramo po z, dobimo

$$w = \frac{1+\nu}{E} \lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} \{ I_0 (\lambda r) A_n + [4 (1-\nu) I_0 (\lambda r) + \lambda r I_1 (\lambda r)] B_n + K_0 (\lambda r) C_n - [4 (1-\nu) K_0 (\lambda r) - \lambda r K_1 (\lambda r)] D_n \} \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \lambda z \qquad (14)$$

Zunanja obremenitev in robni pogoji

Kakor je bilo že omenjeno, smo izraze za napetosti in pomike pisali v obliki neskončnih vrst, funkcijo $Z(z)$ pa smo izbrali v obliki sinusne ali kosinusne funkcije zato, ker bomo zunanjo obremenitev predstavili s Fourierovo neskončno vrsto. Razvrstitev v Fourierovo vrsto je znan in enostaven način, s katerim lahko poljubno funkcijo obremenitve (tudi nezvezno) spremenimo v zvezno, ki je sestavljena iz posameznih elementarnih sinusnih in kosinusnih valov [4].

Splošen izraz za tako predstavljeno funkcijo obremenitve je

$$p(z) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2 n \pi z}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2 n \pi z}{L}$$

Običajno lahko predstavimo obremenitveno funkcijo kot simetrično ali antimetrično glede na $z = 0$. V prvem primeru so koeficienti b_n nični in izračunamo samo koeficiente a_n po

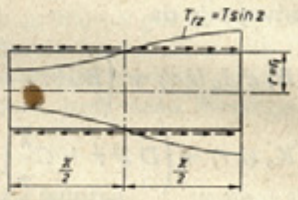
$$a_n = \frac{4}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} p(z) \cos \frac{2 n \pi z}{L} \, dz \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots)$$

V drugem primeru pa so koeficienti a_n nični in imamo samo

$$b_n = \frac{4}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} p(z) \sin \frac{2 n \pi z}{L} \, dz \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

Koeficienta a_0, ki večkrat povzroča težave, se oprostimo s tem, da izberemo primerno periodo L tako, da je srednja vrednost funkcije v tej periodi nič. V tem primeru je namreč tudi $a_0 = 0$.

S tem smo si ustvarili vse potrebne instrumente za postavljanje robnih pogojev in izračun integracijskih konstant, kar bomo prikazali najprej na primeru za poln valj. Glede na to, da ne poznamo porazdelitev tornih sil po zunanjem obodu valja, kakor je bilo že omenjeno v uvodu, suponiramo, da je obremenitev porazdeljena po enostavnem sinusnem valu, ki da tangencialne napetosti na obodu $\tau_{rz} = T \sin z$. Zaradi ravnotežja morajo biti seveda te obremenitve tako razporejene, da je njihova vsota po celotnem valju nična. Za dolžino valja smo vzeli π.



S tako izbrano obremenitvijo smo si bistveno skrajšali računanje, ker nam je ni treba razvijati v Fourierovo vrsto oziroma se ta pojavlja samo kot prvi člen. Zato lahko vzamemo tudi v enačbah za napetosti in pomike samo prve člene z $n = 1$ ter so vrste odveč.

Robni pogoji: na robu $r = r_1$ mora biti $\sigma_r = 0$ in $\tau_{rz} = T \sin z$.

Ker imamo opravka s polnim valjem, uporabimo enačbe (8) do (13), skrajšane tako, da je $C = D = 0$ in $\lambda = 1$.

$$\sigma_r = \left[\frac{1}{r_1} I_1 (r_1) - I_0 (r_1)\right] A + [(2\nu - 1) I_0 (r_1) - r_1 I_1 (r_1)] B = 0 \qquad (15)$$

$$\tau_{rz} = I_1 (r_1) A + [r_1 I_0 (r_1) + 2 (1-\nu) I_1 (r_1)] B = T$$

Iz teh izrazov lahko izračunamo konstanti A in B, za kateri dobimo pri $\nu = 0{,}3$ (za jeklo)

$$A = \frac{r_1 [0{,}4 I_0 (r_1) + r_1 I_1 (r_1)]}{1{,}4 I_1^2 (r_1) + r_1^2 [I_1^2 (r_1) - I_0^2 (r_1)]} \cdot T$$

$$B = \frac{I_1 (r_1) - r_1 I_0 (r_1)}{1{,}4 I_1^2 (r_1) + r_1^2 [I_1^2 (r_1) - I_0^2 (r_1)]} \cdot T$$

Nadaljnji račun je izveden za dva primera, in sicer za zunanji premer $r_1 = 1$ in $r_1 = 2$.

$I_0 (1) = 1{,}2661 \qquad I_0 (2) = 2{,}2796$

$I_1 (1) = 0{,}5652 \qquad I_1 (2) = 1{,}5906$

Ko vrednosti za Besselove funkcije vstavimo v enačbi za A in B, dobimo konstante

za $r_1 = 1$: $\quad A = -1{,}2814\, T$
$\quad B = 0{,}8381\, T$

za $r_1 = 2$: $\quad A = -1{,}1490\, T$
$\quad B = 0{,}4167\, T$

S temi konstantami dobijo enačbe za napetosti in pomike obliko: za $r_1 = 1$

$$\sigma_r = \left[-1{,}2814 \frac{1}{r} I_1(r) - 0{,}8381\, r\, I_1(r) + 0{,}9462\, I_0(r) \right] T \cos z$$

$$\sigma_\varphi = \left[1{,}2814 \frac{1}{r} I_1(r) - 0{,}3352\, I_0(r) \right] T \cos z$$

$$\sigma_z = [1{,}5681\, I_0(r) + 0{,}8381\, r\, I_1(r)]\, T \cos z$$

$$\tau_{rz} = [0{,}8381\, r\, I_0(r) - 0{,}1081\, I_1(r)]\, T \sin z$$

$$u = \frac{1{,}3}{E} [1{,}2814\, I_1(r) - 0{,}8381\, r\, I_0(r)]\, T \cos z$$

$$w = \frac{1{,}3}{E} [1{,}0653\, I_0(r) + 0{,}8381\, r\, I_1(r)]\, T \sin z$$

ter za $r_1 = 2$

$$\sigma_r = \left[-1{,}1490 \frac{1}{r} I_1(r) - 0{,}4167\, r\, I_1(r) + 0{,}9825\, I_0(r) \right] T \cos z$$

$$\sigma_\varphi = \left[1{,}1490 \frac{1}{r} I_1(r) - 0{,}1667\, I_0(r) \right] T \cos z$$

$$\sigma_z = [0{,}268\, I_0(r) + 0{,}4167\, r\, I_1(r)]\, T \cos z$$

$$\tau_{rz} = [-0{,}5656\, I_1(r) + 0{,}4167\, r\, I_0(r)]\, T \sin z$$

$$w = \frac{1{,}3}{E} [0{,}0178\, I_0(r) + 0{,}4167\, r\, I_1(r)]\, T \sin z$$

$$u = \frac{1{,}3}{E} [1{,}1490\, I_1(r) - 0{,}4167\, r\, I_0(r)]\, T \cos z$$

Za spremljanje napetosti v notranjosti valja je treba računati posamezne vrednosti za več različnih premerov. V prvem primeru so podane izračunane napetosti in aksialni pomik w za $r = 0$; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8 in 1, v drugem primeru pa za $r = 0$; 0,4; 0,8; 1,2; 1,6 in 2. Radialni pomik je izračunan samo za $r = 1$ oziroma $r = 2$.

V obeh primerih računanja je omembe vredna samo vrednost člena $\frac{1}{r} I_1(r)$, pri kateri dobimo za $r = 0$ nedoločeno vrednost $\frac{0}{0}$. Da raziščemo ta primer, razvijemo funkcijo $I_1(r)$ v vrsto [3]

$$I_1(r) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(t+1) \cdot \Gamma(1+t+1)} \left(\frac{r}{2}\right)^{1+2t}$$

$$I_1(r) = \frac{1}{2} r + \frac{1}{2} \frac{1}{2^3} r^3 + \frac{1}{2.6} \cdot \frac{1}{2^5} r^5 \ldots$$

$$\frac{1}{r} I_1(r) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2^3} r^2 + \ldots$$

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r} I_1(r) = \frac{1}{2}$$

Pri drugih členih računanje ne povzroča težav. Rezultati so podani v tabeli

$r_1 = 1$

r	σ_r	σ_φ	σ_z	τ_{rz}	$\frac{E}{1{,}3} w$	$\frac{E}{1{,}3} u$
0	0,3055	0,3055	1,5681	0	1,0653	
0,2	0,2950	0,3053	1,6006	0,1584	1,0927	
0,4	0,2625	0,3048	1,6999	0,3267	1,1767	
0,6	0,2057	0,3039	1,8701	0,5152	1,3210	
0,8	0,1201	0,3024	2,1194	0,7353	1,4829	
1	0	0,2998	2,4591	1	1,8225	—0,3368

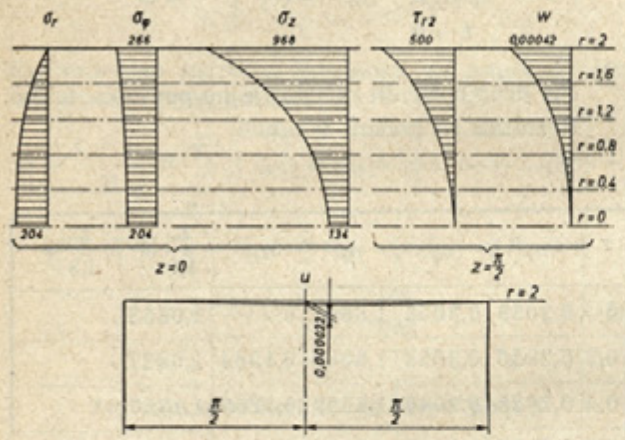
$r_1 = 2$

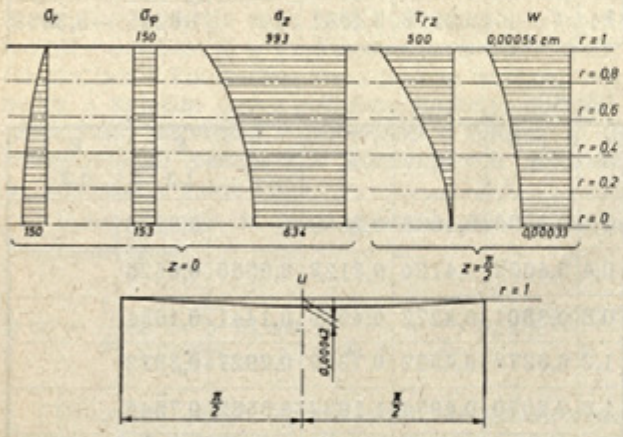
r	σ_r	σ_φ	σ_z	τ_{rz}	$\frac{E}{1{,}3} w$	$\frac{E}{1{,}3} u$
0	0,4080	0,4080	0,2680	0	0,0178	
0,4	0,4022	0,4126	0,3128	0,0580	0,0525	
0,8	0,3801	0,4272	0,4569	0,1441	0,1651	
1,2	0,3275	0,4522	0,7309	0,2927	0,3822	
1,6	0,2070	0,4974	1,1922	0,5532	0,7544	
2	0	0,5339	1,9368	1	1,3665	—0,0718

Pripomniti je treba, da moramo, če hočemo dobiti prave rezultate, vrednosti iz tabel za σ_r, σ_φ, σ_z in u pomnožiti še s $T \cos z$, vrednosti za τ_{rz} in w pa s $T \sin z$. Iz tega izhaja, kar je bilo tudi pričakovati, da dobimo za prve štiri količine maksimalne vrednosti v sredini palice ($z = 0$), za drugi dve pa na koncih $\left(z = \frac{\pi}{2}\right)$. Oba pomika u in w je treba povrh tega pomnožiti še s faktorjem $\frac{1{,}3}{E}$. V primeru, če je največja strižna obremenitev $T = 500$ kp/cm², so poteki največjih napetosti in največjega pomika w narisani v naslednjih diagramih, in to za $r_1 = 1$ in $r_1 = 2$. Pomik u pa je narisan po vsej dolžini valja.

Že na prvi pogled je očitno, da potekajo vse napetosti in pomik w tako, kakor bi bilo pričakovati pri taki obremenitvi. To pa ne velja za pomik u, ki je v primeru $r_1 = 2$ skoraj ničen, medtem ko je pri

$r_1 = 1$ še kar izrazit. Zato bomo raziskali še, kako se obnaša ta pomik pri različnih razmerjih med debelino in dolžino valja, z drugimi besedami pri kratkih in dolgih palicah.





Brezdimenzionalne koordinate

Da si omogočimo neposredno primerjanje posameznih primerov pri različnih razmerjih med debelino in dolžino valjev, bomo vpeljali v račun brezdimenzionalno koordinato namesto dosedanje koordinate r.

Vzemimo votel valj s srednjim polmerom a.

Vsak poljuben polmer lahko definiramo z izrazom

$$r = x \, . \, a$$

Če označimo zunanji premer z r_1 in notranjega z r_2, lahko pišemo

$$r_1 = x_1 \, a \quad \text{in} \quad r_2 = x_2 \, a$$

Največja vrednost x je lahko pri polnem valju $x = 2$, ker je v tem primeru $r_1 = 2\,a$, najmanjša vrednost pa je spet pri polnem valju $x = 0$ zaradi $r_2 = 0$. Pri vsakem votlem valju pa bo x med tema vrednostima. Torej

$$0 \leqslant x \leqslant 2$$

Tako smo dobili možnost, da ne glede na srednji polmer a s spreminjanjem x v omenjenih mejah dobivamo valje z različnimi debelinami stene.

Zdaj pišemo še funkcijo $Z(z)$ v malo drugačni obliki

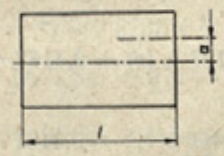
$$Z(z) = \begin{matrix}\sin \\ \cos\end{matrix} \lambda \frac{z}{a}, \text{ kjer je } \lambda = \frac{n \pi a}{l}$$

Pri enostavni sinusni obremenitvi ($n = 1$) je

$$\lambda = \frac{\pi a}{l}$$

Če izberemo periodo $l = \pi \, . \, a$, je $\lambda = 1$.

Jasno je, da so rezultati enaki za vsa razmerja $\frac{l}{a} = \pi$, če se a poljubno spreminja, kajti vzdolžni prerezi valja so podobni liki.



Koeficient λ torej lahko rabi kot merilo za relativno dolžino valja. Čim manjši je λ, tem večja je dolžina l pri konstantnem a in obratno.

Radialni pomik pri polnem valju

Raziskali bomo pomik u pri polnem valju. Zanima nas, ali obstaja pri prej suponirani obremenitvi med širino valja in njegovo dolžino razmerje, pri katerem je pomik u po vsej dolžini ničen. Račun je najenostavnejši, če vzamemo valj z $a = 1$. V tem primeru je zunanji polmer $r_1 = 2\,a = 2$.

Prejšnjim robnim pogojem (enačbi 15) se pridruži še tretji, ki terja, da mora biti na robu $r_1 = 2$ pomik $u = 0$.

Pogojne enačbe
$$\sigma_r = 0$$
$$\tau_{rz} = T \sin \lambda z$$
$$u = 0$$

lahko z vstavljanjem $x_1 = 2$ pišemo

$$\sigma_r = \lambda^3 \left\{ \left[\frac{1}{2\lambda} I_1(2\lambda) - I_0(2\lambda) \right] A + \right.$$

$$\left. + \left[(2\nu - 1) I_0(2\lambda) - 2\lambda I_1(2\lambda) \right] B \right\} \cos \lambda z = 0$$

$$\tau_{rz} = \lambda^3 \{ I_1(2\lambda) A + [2\lambda I_0(2\lambda) +$$

$$+ 2(1-\nu) I_1(2\lambda)] B \} . \sin \lambda z = T \sin \lambda z$$

$$u = \frac{1+\nu}{E} \lambda^2 [-I_1(2\lambda) A - 2\lambda I_0(2\lambda) B] \cos \lambda z = 0 \tag{16}$$

Enačbe napišemo v skrajšani obliki

$$\begin{aligned} a_1 A + b_1 B &= 0 \\ a_2 A + b_2 B &= T \\ -a_3 A - b_3 B &= 0 \end{aligned} \tag{17}$$

kjer pomenijo (uvedemo še okrajšavo $2\lambda = t$)

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{t} I_1(t) - I_0(t) \\ a_2 &= \left(\frac{t}{2}\right)^3 I_1(t) \\ a_3 &= I_1(t) \\ b_1 &= (2\nu - 1) I_0(t) - t I_1(t) \\ b_2 &= \left(\frac{t}{2}\right)^2 [t I_0(t) + 2(1-\nu) I_1(t)] \\ b_3 &= t I_0(t) \end{aligned} \tag{18}$$

Enačbe 16 predstavljajo sistem treh enačb s tremi neznankami A, B in λ, iz katerih moramo poiskati tisti λ, pri katerem je $u = 0$. Težava je v tem, da se pojavlja neznanka λ tudi v argumentu Besselovih funkcij, iz katerih se λ ne da določiti eksplicitno, temveč jih bo treba razviti v vrste.

Iz tretje enačbe 17 dobimo

$$A = -\frac{b_3}{a_3} B$$

To vstavljeno v prvo in drugo enačbo dá

$$-\frac{a_1 b_3}{a_3} B + b_1 B = 0; \quad B\left(-\frac{a_1 b_3}{a_3} + b_1\right) = 0$$

$$-\frac{a_2 b_3}{a_3} B + b_2 B = T; \quad B\left(-\frac{a_2 b_3}{a_3} + b_2\right) = T$$

Iz zadnjega izraza izhaja, da $B \neq 0$, ker $T \neq 0$. Mora biti torej

$$-\frac{a_1 b_3}{a_3} + b_1 = 0$$

Če v tem izrazu zamenjamo vrednosti iz 18, dobimo po ureditvi pogojno enačbo za λ

$$2(\nu - 1) I_0(t) . I_1(t) + t [I_0^2(t) - I_1^2(t)] = 0 \tag{19}$$

Da iz te enačbe lahko izračunamo t, razvijemo Besselove funkcije v vrste [3]

$$I_0(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma^2(r+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2r} = 1 + \frac{1}{2.2} . t^2 +$$

$$+ \frac{1}{4.4.2^2} t^4 + \ldots$$

$$I_1(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(r+1) . \Gamma(r+2)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2r+1} = t \left) \frac{1}{2} + \right.$$

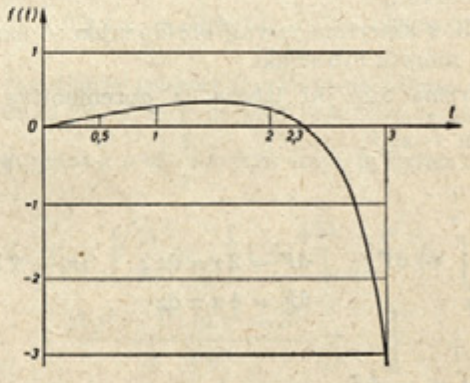
$$\left. + \frac{1}{2.2^3} t^2 + \frac{1}{2.6.2^5} t^4 + \ldots \right)$$

Z vstavljanjem teh izrazov v enačbo 19 in zanemaritvijo višjih členov, dobimo pri $\nu = 0{,}3$ pogojno enačbo

$$f(t) = 0{,}3\, t - \frac{0{,}1\, t^3}{2^3} - \frac{0{,}5\, t^5}{3.2^5} - \frac{4{,}5\, t^7}{3^2.2^{10}} - \frac{0{,}4\, t^9}{3.2^{12}} -$$

$$- \frac{4{,}9\, t^{11}}{3^2.2^{16}} - \frac{1.7\, t^{13}}{3^4.2^{17}} = 0 \tag{20}$$

Ker je enačba 20 prekomplicirana za analitično rešitev, jo predstavimo grafično. Iskana vrednost $t \neq 0$, pri kateri je enačba 20 zadovoljena, bo v presečišču krivulje z abscisno osjo.



S slike je razvidno, da je to pri $t = 2{,}3$ oziroma, ker je $t = 2\lambda$, je pomik $u = 0$ pri $\lambda = 1{,}15$, se pravi pri razmerju

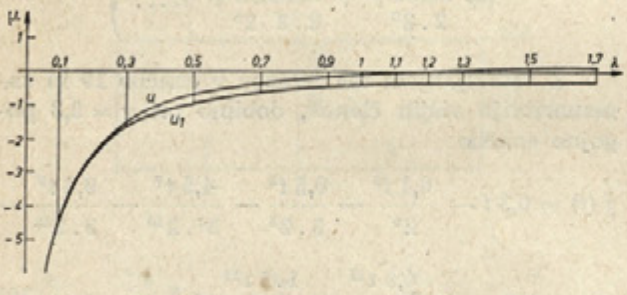
$$\frac{a}{l} = \frac{\lambda}{\pi} = \frac{1{,}15}{\pi} = 0{,}366$$

Pripomniti je treba, da funkcija na sliki nima posebnega fizikalnega pomena, ker v enačbi 20 ni bil upoštevan faktor λ^2 iz tretje enačbe 16. Ta način reševanja je samo omogočil, da smo zaradi precej strme krivulje določili presečišče z absciso čim natančneje.

Iz tega računa izhaja zaključek: pri $\lambda > 1{,}15$, tj. pri $\frac{a}{l} > 0{,}366$ se zunanji obod polnega valja, ki je obremenjen s tangencialno obremenitvijo $T \sin \lambda \frac{z}{a}$ izboči (navzven), pri $\lambda < 1{,}15$ $\left(\frac{a}{l} < 0{,}366\right)$ pa se vzboči (navznoter).

Za ilustracijo je narisana še krivulja največjih pomikov u v odvisnosti od relativne dolžine valja. Za izračun konstant A in B sta uporabljeni enačbi 15 z $r_1 = 2$ (pri $a = 1$ in $x_1 = 2$).

Pomik u je računan po tretji enačbi 16 pri $z = 0$



Da s slike dobimo prave velikosti pomikov, jih je treba pomnožiti še z $\frac{1+\nu}{E}$.

Zanimiva bi bila še primerjava tako dobljenih pomikov s pomiki, ki bi nastali pri enostavni natezni obremenitvi, če bi bil valj obremenjen na čelnih ploskvah.

Sili, s katerima je valj obremenjen v obeh primerih, morata biti enaki.

Strižna sila, ki izhaja iz obremenitve $\tau_{rz} = T \sin \frac{\lambda}{a} z$, je

$$F = \int_0^{\frac{l}{2}} \tau_{rz}\, dF\,; \qquad dF = 2\, r\, \pi\, dz\,; \qquad (r_1 = 2\, a)$$

$$dF = 4\, a\, \pi\, dz$$

$$F = \int_0^{\frac{l}{2}} T \sin \frac{\lambda z}{a} \,.\, 4\, a\, \pi\, dz$$

ker pa je $l = \frac{a\pi}{\lambda}$, je zgornja meja integrala

$$\frac{l}{2} = \frac{a\pi}{2\lambda}$$

Tako dobimo strižno silo

$$F = 4\, a\, \pi\, T \int_0^{\frac{a\pi}{2\lambda}} \sin \frac{\lambda}{a} z\, dz$$

$$F = 4\, \frac{a^2 \pi}{\lambda}\, T = 4\, a\, l\, T$$

Natezna sila mora biti enaka tej strižni sili.

Če predpostavimo, da je palica zadosti dolga in je zaradi tega napetost σ_z konstantna po prerezu, je

$$\sigma_z = \frac{F}{S} = \frac{4\, a\, l\, T}{4\, a^2 \pi} = \frac{l\, T}{a\, \pi} = \frac{T}{\lambda}\,; \quad (S = r_1^2\, \pi = 4\, a^2\, \pi)$$

Radialni pomik na zunanjem robu pa izhaja iz

$$\varepsilon_r = \frac{d\, u}{d\, r}\,; \; u_1 = \int_0^{r_1} \varepsilon_r\, dr = \varepsilon_r\, r_1 = \frac{\sigma_z \,.\, \nu}{E} \,.\, 2\, a$$

Z vstavljanjem napetosti σ_z v ta izraz dobimo slednjič

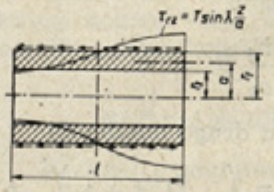
$$u_1 = \frac{2\, T\, \nu\, a}{\lambda\, E}$$

To je enačba krivulje, ki je tudi narisana na prejšnji sliki, seveda v istem merilu, v kakršnem so narisane vrednosti u.

Napetosti in pomiki pri votlem valju

Podobno kakor pri polnem se tudi pri votlem valju pokaže (glej primere na koncu), da je predznak pomika u odvisen od razmerja $\frac{a}{l}$. Postopek iskanja relativne dolžine, pri kateri je na zunanjem robu $u = 0$, je podoben kakor pri polnem valju, samo da je nekoliko bolj zamuden, ker imamo opravka z večjim številom bolj kompliciranih enačb.

Predpostavimo zopet osno simetrično tangencialno obremenitev po zunanjem obodu $\tau_{rz} = T \sin \lambda \frac{z}{a}$:



$$\lambda = \frac{n\, \pi\, a}{l} \qquad \begin{aligned} r &= x \,.\, a \\ r_1 &= x_1 \,.\, a \\ r_2 &= x_2 \,.\, a \end{aligned}$$

Robni pogoji:

na zunanjem robu $x = x_1$ mora biti $\sigma_r = 0$

$$\tau_{rz} = T \sin \lambda \frac{z}{a}$$

$$u = 0$$

Na notranjem robu $x = x_2$ mora biti $\sigma_r = 0$

$$\tau_{rz} = 0$$

Z uporabo enačb 8, 11 in 13 v brezdimenzionalni obliki lahko za $a = 1$ napišemo robne pogoje.

$$\sigma_r = \lambda^3 \left\{ \left[\frac{1}{\lambda x_1} I_1(\lambda x_1) - I_0(\lambda x_1) \right] A + \right.$$

$$+ [(2\nu - 1) I_0(\lambda x_1) - \lambda x_1 I_1(\lambda x_1)] B - \left[K_0(\lambda x_1) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda x_1} K_1(\lambda x_1) \right] C - [(2\nu - 1) K_0(\lambda x_1) +$$

$$\left. + \lambda x_1 K_1(\lambda x_1)] D \right\} \cos \lambda z = 0$$

$$\sigma_r = \lambda^3 \left\{ \left[\frac{1}{\lambda x_2} I_1(\lambda x_2) - I_0(\lambda x_2) \right] A + \right.$$

$$+ [(2\nu - 1) I_0(\lambda x_2) - \lambda x_2 I_1(\lambda x_2)] B - \left[K_0(\lambda x_2) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda x_2} K_1(\lambda x_2) \right] C - [(2\nu - 1) K_0(\lambda x_2) -$$

$$\left. - \lambda x_2 K_1(\lambda x_2)] D \right\} \cos \lambda z = 0$$

$$\tau_{rz} = \lambda^3 \{ I_1(\lambda x_1) A + [\lambda x_1 I_0(\lambda x_1) +$$

$$+ 2(1-\nu) I_1(\lambda x_1)] B - K_1(\lambda x_1) C - [\lambda x_1 K_0(\lambda x_1) -$$

$$- 2(1-\nu) K_1(\lambda x_1)] D \} \sin \lambda z = T \sin \lambda z$$

$$\tau_{rz} = \lambda^3 \{ I_1(\lambda x_2) A + [\lambda x_2 I_0(\lambda x_2) +$$

$$+ 2(1-\nu) I_1(\lambda x_2)] B - K_1(\lambda x_2) C - [\lambda x_2 K_0(\lambda x_2) -$$

$$- 2(1-\nu) K_1(\lambda x_2)] D \} \sin \lambda z = 0$$

$$u = \frac{1+\nu}{E} \lambda^2 [- I_1(\lambda x_1) A - \lambda x_1 I_0(\lambda x_1) B +$$

$$+ K_1(\lambda x_1) C + \lambda x_1 K_0(\lambda x_1) D] \cos \lambda z = 0$$

Imamo pet enačb s petimi neznankami A, B, C, D in λ, zadnja pa se pojavlja v argumentu Besselovih funkcij. Z eliminacijo prvih štirih neznank ostane samo ena enačba v obliki $f(\lambda) = 0$. Ves postopek je tu samo nakazan, ker so podrobna izvajanja silno dolga in zamudna.

Enačbe pišemo v skrajšani obliki

$$\begin{aligned} a_1 A + b_1 B + c_1 C + d_1 D &= 0 \\ a_2 A + b_2 B + c_2 C + d_2 D &= 0 \\ a_3 A + b_3 B + c_3 C + d_3 D &= T \\ a_4 A + b_4 B + c_4 C + d_4 D &= 0 \\ a_5 A + b_5 B + c_5 C + d_5 D &= 0 \end{aligned} \qquad (21)$$

kjer pomenijo a_i, b_i, c_i in d_i koeficiente ob integracijskih konstantah v robnih pogojih.

Iz prvih štirih enačb 21 izrazimo konstante s pomočjo Cramerjevih obrazcev $A = \frac{D_A}{D_s}$, $B = \frac{D_B}{D_s}$ $C = \frac{D_C}{D_s}$ in $D = \frac{D_D}{D_s}$, v katerih pomeni D_s determinanto sistema, izrazi v števcih pa ustrezne determinante neznank.

$$D_s = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \qquad D_A = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ T & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$D_B = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & c_1 & d_1 \\ a_2 & 0 & c_2 & d_2 \\ a_3 & T & c_3 & d_3 \\ a_4 & 0 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \qquad D_C = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & d_1 \\ a_2 & b_2 & 0 & d_2 \\ a_3 & b_3 & T & d_3 \\ a_4 & b_4 & 0 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$D_D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & T \\ a_4 & b_4 & c_4 & 0 \end{vmatrix}$$

Izraze za konstante vstavimo v peto enačbo 21

$$a_5 \frac{D_A}{D_s} + b_5 \frac{D_B}{D_s} + c_5 \frac{D_C}{D_s} + d_5 \frac{D_D}{D_s} = 0$$

oziroma

$$f(\lambda) = a_5 D_A + b_5 D_B + c_5 D_C + d_5 D_D = 0 \qquad (22)$$

Enačba 22 vsebuje samo neznanko λ.

Besselove funkcije razvijemo v vrste in se omejimo samo na prve tri člene.

$$I_0(\lambda x_1) = 1 + 0{,}25 (\lambda x_1)^2 + 0{,}00156 (\lambda x_1)^4$$

$$I_1(\lambda x_1) = 0{,}5 \lambda x_1 + 0{,}0625 (\lambda x_1)^3 + 0{,}0026 (\lambda x_1)^5$$

Za razvijanje funkcij $K_n(\lambda x)$ uporabimo asimptotski izraz [5], ki daje zadosti natančne vrednosti, če je argument $\lambda x < \frac{3}{2}\pi$, kar velja za naš primer

$$K_n(t) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2t}}\, e^{-t} \left[1 + \frac{4\nu^2 - 1^2}{1!\, 8t} + \right.$$

$$\left. + \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2)}{2!\, (8t)^2} + \dots \right]$$

V našem primeru je

$$K_0(\lambda x_1) = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda x_1}}\, e^{-\lambda x_1} \left[1 - 0{,}125 \frac{1}{\lambda x_1} + \right.$$

$$\left. + 0{,}0703 \frac{1}{(\lambda x_1)^2} \right]$$

$$K_1(\lambda x_1) = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda x_1}}\, e^{-\lambda x_1} \left[1 + 0{,}375 \frac{1}{\lambda x_1} - \right.$$

$$\left. - 0{,}1172 \frac{1}{(\lambda x_1)^2} \right]$$

Enake izraze dobimo za druge funkcije, samo da je argument λx_1 zamenjan z λx_2.

Tako dobljene Besselove funkcije v obliki trinomov vstavimo v izraze za a_i, b_i, c_i in d_i, ki jih zamenjamo v razvitih determinantah D_A, D_B, D_C in D_D. Determinante sistema D_s ni treba razvijati, ker je v enačbi 22 tako odvečna.

Dokončne oblike enačbe 22 tu zaradi znatne dolžine ne navajamo. V njej se pojavlja namreč 118 členov, ki vsebujejo razen različnih kombinacij potenc x_1 in x_2 še neznanko λ v potencah od λ^{-5} do λ^9.

Iz te enačbe lahko izračunamo tisto vrednost λ, pri kateri je pomik $u = 0$. Enačba velja za votel valj srednjega polmera $a = 1$ in poljubne debeline stene.

Vzemimo za primer debelo cev z $x_1 = 1{,}2$ in $x_2 = 0{,}8$. Pri $a = 1$ je debelina stene $r_1 - r_2 = x_1 - x_2 = 0{,}4$.

Z vstavitvijo vrednosti za x_1 in x_2 v enačbo $f(\lambda)$, se ta poenostavi in dobimo

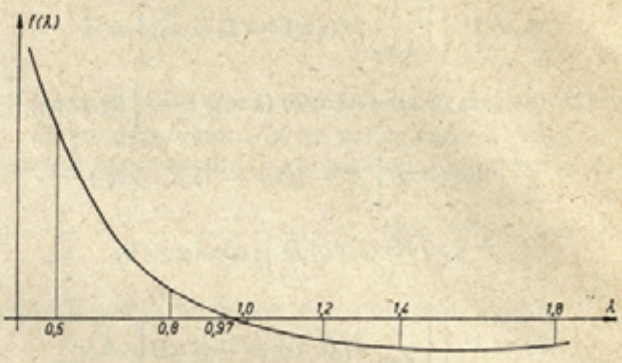
$$
\begin{aligned}
f(\lambda) = \pi e^{-1{,}6\lambda} \Big(0{,}2330 + 0{,}3691 \frac{1}{\lambda^2} + 0{,}2311 \frac{1}{\lambda} - \\
- 0{,}0174\,\lambda + 0{,}0526\,\lambda^2 + 0{,}0004\,\lambda^3 + 0{,}0225\,\lambda^4 - \\
- 0{,}0008\,\lambda^5 + 0{,}0013\,\lambda^6\Big) + \frac{\pi}{2{,}4} e^{-2{,}4\lambda}\Big(-0{,}0514 + \\
+ 0{,}0007 \frac{1}{\lambda^4} - 0{,}0034 \frac{1}{\lambda^3} + 0{,}0047 \frac{1}{\lambda^2} - 0{,}0578 \frac{1}{\lambda} + \\
+ 0{,}0388\,\lambda + 0{,}0301\,\lambda^2 + 0{,}0076\,\lambda^3 + 0{,}0059\,\lambda^4 + \\
+ 0{,}0007\,\lambda^5 + 0{,}0006\,\lambda^6\Big) + \frac{\pi}{1{,}96} e^{-2\lambda}\Big(-0{,}6591 + \\
+ 0{,}0314 \frac{1}{\lambda^5} + 0{,}0492 \frac{1}{\lambda^4} - 0{,}1907 \frac{1}{\lambda^3} - 0{,}2111 \frac{1}{\lambda^2} - \\
- 0{,}2699 \frac{1}{\lambda} - 0{,}6594\,\lambda - 0{,}5065\,\lambda^2 - 0{,}3120\,\lambda^3 - \\
- 0{,}0916\,\lambda^4 - 0{,}0357\,\lambda^5 + 0{,}0032\,\lambda^6 - 0{,}0038\,\lambda^7 - \\
- 0{,}0004\,\lambda^8 - 0{,}0001\,\lambda^9\Big) = 0
\end{aligned}
$$

To enačbo predstavimo grafično, in sicer izračunamo vrednost za $\lambda = 0{,}1$; $0{,}5$; $0{,}8$; $1{,}0$; $1{,}2$; $1{,}4$ in $1{,}8$.

Rezultati so

$\lambda =$	0,1	0,5	0,8	1,0
$f(\lambda) =$	+ 4590,0	+ 1,7928	+ 0,1540	— 0,0567

$\lambda =$	1,2	1,4	1,8	
$f(\lambda) =$	— 0,1057	— 0,1665	— 0,1636	



Slika kaže, da je iskana vrednost $\lambda = 0{,}97$. Pri vrednostih $\lambda < 0{,}97$ se cev vzboči (navznoter), pri večjih pa izboči (navzven).

Mejno razmerje srednjega polmera proti dolžini valja je

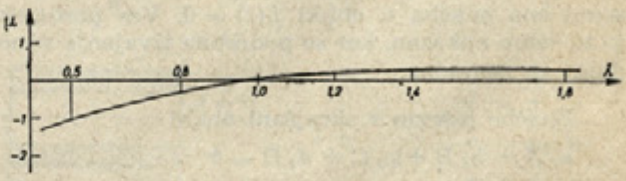
$$\frac{a}{l} = \frac{\lambda}{\pi} = \frac{0{,}97}{\pi} = 0{,}3087$$

Dokončno krivuljo največjih pomikov u (pri $z = 0$) v odvisnosti od relativne dolžine valja dobimo s tem, da še sestavimo izraz

$$u = \lambda^2 \frac{f(\lambda)}{D_s}$$

Na naslednji sliki je prikazana ta krivulja. Zaradi krajšega računa je determinanta D_s izračunana samo za ustrezne točke, ni pa razvita v vrsto kakor je $f(\lambda)$.

Kakor pri polnem valju je tudi na tej sliki krivulja narisana v merilu $1 : \frac{1+\nu}{E}$

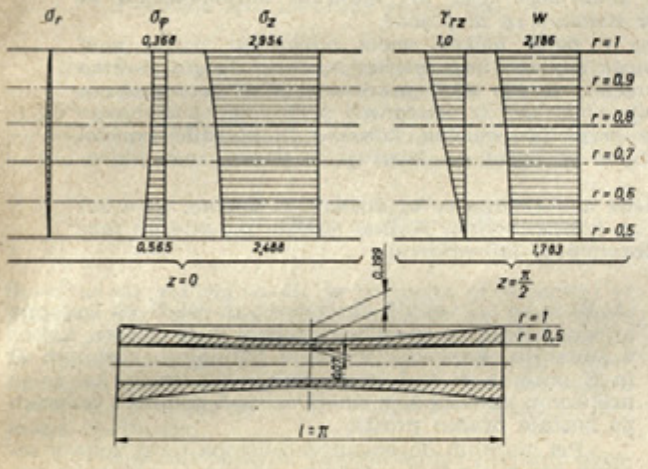


Za ilustracijo vseh napetosti in pomikov sta prikazana v diagramih še dva primera.

V prvem primeru je votel valj dolžine $l = \pi$ z zunanjim premerom $r_1 = 1$ in notranjim $r_2 = 0{,}5$, kar daje $\lambda = 0{,}75$. V računu je predpostavljeno $T = 1$.

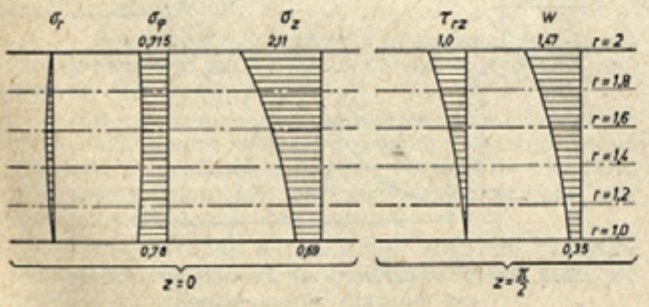
Napetosti σ_r, σ_φ in σ_z so narisane v diagramih v prerezu $z = 0$, tangencialna napetost τ_{rz} in aksialni pomik w v prerezu $z = \frac{\pi}{2}$, radialni pomik u pa je podan po vsej dolžini valja. Posamezne vrednosti so podane v naslednji tabeli

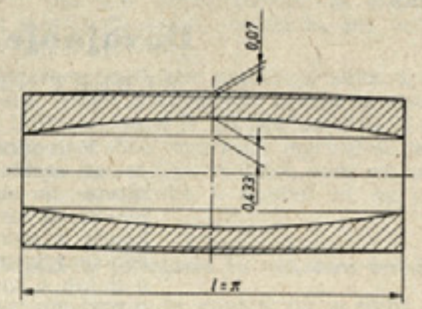
r	σ_r	σ_φ	σ_z	τ_{rz}	$\frac{E}{1+\nu} w$	$\frac{E}{1+\nu} u$
0,5	0	+0,5650	+2,4883	0	+1,7827	—0,0699
0,6	+0,0750	+0,4788	+2,5021	+0,2284	+1,7958	
0,7	+0,0981	+0,4298	+2,5586	+0,4305	+1,8453	
0,8	+0,0878	+0,4000	+2,6538	+0,6209	+1,9277	
0,9	+0,0538	+0,3808	+2,7852	+0,8084	+2,0412	
1,0	0	+0,3676	+2,9536	+1	+2,1860	—0,3987



V drugem primeru je pri isti dolžini valja $l = \pi$ zunanji premer $r_1 = 2$ in notranji $r_2 = 1$, kar daje $\lambda = 1{,}5$. Za ta primer dobimo vrednosti, ki so podane v naslednji tabeli oziroma prikazane grafično v diagramu.

r	σ_r	σ_φ	σ_z	τ_{rz}	$\frac{E}{1+\nu} w$	$\frac{E}{1+\nu} u$
1,0	0	0,7786	0,6919	0	0,3463	+0,4329
1,2	0,1324	0,7285	0,8353	0,1402	0,4548	
1,4	0,1703	0,6974	1,0380	0,2951	0,6116	
1,6	0,1595	0,6953	1,3088	0,4794	0,8184	
1,8	0,1025	0,7000	1,6604	0,7076	1,1065	
2,0	0	0,7146	2,1109	1	1,4722	+0,0793





Zaključek

Omeniti je treba že tu, da dobljene enačbe kljub veliki natančnosti vendar ne dajejo popolnoma eksaktnih rešitev. Pri izvajanju enačb smo namreč predpostavili, da sta oba čelna robova valja brez napetosti. Po pravilu o enakosti strižnih napetosti na dveh pravokotnih ravninah pa bi morali v našem primeru imeti na čelnih ploskvah tangencialne obremenitve $\tau_{zr} = \tau_{rz}$. Tem robnim pogojem pa z uporabljenimi enačbami ni mogoče zadostiti. Tako nastala napaka je pri daljših valjih nedvomno zanemarljiva, medtem ko bi bila pri zelo kratkih lahko že znatna.

Že v uvodu je bilo rečeno, da še ni raziskana porazdelitev tornih sil v aksialni smeri. Zato bodo naša izvajanja dobila praktičen pomen šele, ko bo z eksperimentalnimi meritvami ugotovljena porazdelitev tangencialnih oziroma tornih sil.

S primerjanjem diagramov pri izračunanih primerih prihajamo do zaključka, da napetosti σ_r in σ_φ za trdnost tako obremenjenega valja nista pomembni. Pri neki predpostavljeni dopustni napetosti τ_{rz} (v mejah katere mora seveda biti zunanja obremenitev) je za dimenzioniranje odločujoča napetost σ_z, ki dosega npr. v predzadnjem primeru skoraj trikratno vrednost največje tangencialne napetosti. Aksialni pomik w v večini praktičnih primerov nima nobene posebne vloge, pač pa radialni pomik u. Pri betonskem železu npr. je od tega pomika odvisno, ali je železo z betonom zlepljeno po vsej dolžini ali ne. Iz primerov za poln valj je razvidno, da je pomik pri tangencialni obremenitvi v območju $\lambda > 0{,}1$ veliko manjši od pomika pri enostavni natezni obremenitvi.

Literatura

1. Timoshenko — Goodier: Theory of Elasticity, New York, Mc. Graw-Hill 1951.

2. Szabó: Höhere technische Mechanik, Berlin, Springer 1955.

3. Mac Robert: Spherical Harmonics, Methuen Co. LTD. London, 1947.

4. Biezeno — Crammel: Technische Dynamik, Berlin, Springer 1939.

5. Watson: Theory of Bessel Functions, Cambridge 1944.

Avtorjev naslov: Marko Škerlj, diplomirani inženir strojništva, Fakulteta za strojništvo univerze v Ljubljani