DK 539.4.01

Koncentracije napetosti okoli lukenj v debelih ploščah

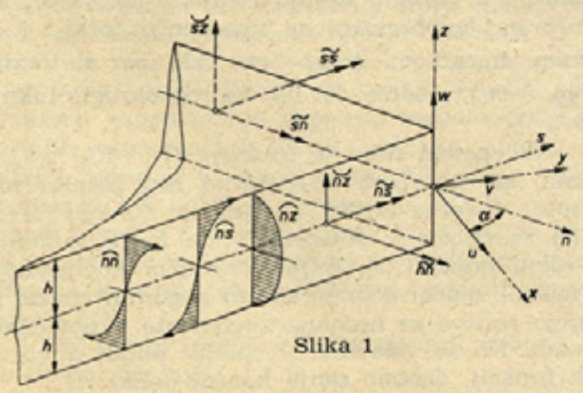
MILAN MURŠIČ

Znana je že vrsta natančnih ali izboljšanih teorij o debelih elastičnih izotropnih ploščah, ki upoštevajo vpliv prečnih tangencialnih napetosti na napetostno in deformacijsko stanje v plošči. Vsaka od njih odpravlja pomanjkljivosti dosedaj na splošno uporabljene klasične Kirchhoffove teorije tenkih plošč, ki postajajo tem očitnejše in tembolj nedopustne z rastočim razmerjem debeline plošče nasproti njenim ostalim dimenzijam. Avtor [1, 2] je prikazal možnost za uporabo osnovnih elastostatičnih enačb za debele plošče A. C. STEVENSONA [3] v N. I. MUSKELIŠVILIJEVI metodi [4] reševanja ravninskih problemov s pomočjo funkcij kompleksne spremenljivke. Tako je razširil uporabnost te zelo učinkovite in razmeroma enostavne metode še na debele plošče. Prikazana teorija je natančna v polju plošče, medtem ko na njenih robovih kaže enake pomanjkljivosti kakor Kirchhoffova teorija tenkih plošč — na vsakem robu more zadoščati le dvema robnima pogojema. Vendar daje prikazana teorija pravilnejše rezultate kakor klasična, ker jo dopolnjuje z novimi členi. Ti so tipični za teorije debelih plošč, saj so odvisni od kvadrata razmerja debeline plošče nasproti njenim dimenzijam.

V tem članku se omejujemo le na kratek opis dedukcije naše teorije in podajanje njenih najvažnejših enačb. Omejujemo se na obravnavanje plošč z neskončnim, enostavno sovisnim območjem (neskončna plošča z eno luknjo) in podajamo oba osnovna robna problema, ki sta izhodišče Muskelišvilijeve metode. Naposled prikazujemo dva načina reševanja drugega osnovnega robnega problema pri upogibu in torziji plošče z vpetim krožnim ali eliptičnim robom: reševanje s pomočjo potenčnih vrst in reševanje s pomočjo konformnega preslikavanja in Cauchyjevih integralov. Podajamo številčne rezultate za nekaj značilnih primerov in jih primerjamo z znanimi rezultati iz Kirchhoffove teorije tenkih plošč.

1. OSNOVNE ENAČBE

Slika 1 prikazuje označbe za komponente napetosti, napetostne rezultante in napetostne momente ter za komponente pomika v plošči debeline $2h$. Prikazuje tudi nelinearen potek upogibnih napetosti $\widehat{nn}$ in torzijskih napetosti $\widehat{ns}$ po njeni debelini. Vse veličine so definirane in označene po A. C. STEVENSONU [3]. Desnoročni Karaezijev koordinatni sistem je označen z x, y, Z. Črka z je rezervirana za kompleksno spremenljivko $z = x + iy$, pa tudi za indeks pri nekaterih veličinah. S prečno črto so označene konjugirano-kompleksne vrednosti kompleksnih veličin, na primer: $\bar{z} = x - iy$; $F(z) = iAz^2$, (A realna konstanta), $F(\bar{z}) = iA\bar{z}^2$, $\bar{F}(z) = -iAz^2$.



Slika 1

V tem članku se omejujemo na obravnavanje neskončnih plošč z eno luknjo, ki so obremenjene le na robu in v bližini neskončne točke. Zato plošča v polju ne bo prečno obremenjena ($p = 0$) in normalna komponenta napetosti $\widehat{zz}$ bo nična povsod v plošči. S pomočjo dveh analitičnih funkcij $\Omega(z)$, $\omega(z)$ oblikujemo v skladu z izvajanji v [3] kompleksne sestave, ki so zelo prikladni za vse metode, kolikor uporabljajo kompleksne spremenljivke. Iz napetosti rezultant in momentov tvorimo

$$\tilde{ns} - \tilde{sn} = \tilde{xy} - \tilde{yx} = \frac{h^2}{6}(1+\nu)\left[\Omega'(z) + \overline{\Omega'}(\bar{z})\right] \tag{1.1}$$

$$-\tilde{ns} - \tilde{sn} + 2i\tilde{ss} = (-\tilde{xy} - \tilde{yx} + 2i\tilde{yy})\, e^{2i\alpha} = -\frac{h^2}{6}(1-\nu)\left[\bar{z}\Omega''(z) + \omega''(z) - \frac{2h^2}{5}\cdot\frac{2-\nu}{1-\nu}\Omega'''(z)\right] e^{2i\alpha} \tag{1.2}$$

$$\tilde{nz} - i\tilde{sz} = (\tilde{xz} - i\tilde{yz})\, e^{i\alpha} = \frac{h^2}{3}\Omega''(z)\, e^{i\alpha}, \tag{1.3}$$

kjer so s črticami označeni odvodi funkcij po spremenljivkah z ali $\bar{z}$, ν pa predstavlja Poissonovo število. Izrazov za komponente pomikov in ostale veličine ne navajamo, ker jih v nadaljevanju ne bomo obravnavali.

Konformno transformacijo problema plošče z območjem S v ravnini kompleksne spremenljivke

z na ploščo z območjem Σ v ravnino kompleksne spremenljivke ζ izvedemo s pomočjo podane preslikovne funkcije $z = f(\zeta)$ [4]. Spremenljivki napišemo v polarni obliki takole

$$z = r e^{i\alpha}; \qquad \zeta = \varrho e^{i\vartheta}. \tag{1.4}$$

Izrazi (1.1) do (1.3) veljajo za ravnino z. Smer n je identična s smerjo r, smer s pa s smerjo α. Ko jih transformiramo v ravnino ζ, so videti takole [2,4].

$$\tilde{\varrho}\vartheta - \tilde{\vartheta}\varrho = \frac{h^2}{6}(1+\nu)\left[\bar{\Omega}^*(\bar{\zeta}) + \Omega^*(\zeta)\right] \tag{1.5}$$

$$-\tilde{\varrho}\vartheta - \tilde{\vartheta}\varrho + 2i\tilde{\vartheta}\vartheta = -\frac{h^2}{6}(1-\nu)\frac{\zeta^2}{\varrho^2 \bar{f}'(\bar{\zeta})}\left[\bar{f}(\bar{\zeta})\,\Omega^{*\prime}(\zeta) + f'(\zeta)\,\omega^*(\zeta) - \frac{2h^2}{5}\frac{2-\nu}{1-\nu}\,.\,\Omega^{**\prime}(\zeta)\right] \tag{1.6}$$

$$\tilde{\varrho}z - i\tilde{\vartheta}z = \frac{h^2}{3}\frac{\zeta}{\varrho\,|f'(\zeta)|}\,\Omega^{*\prime}(\zeta)\,. \tag{1.7}$$

Zaradi krajše pisave smo uvedli pomožne funkcije $\Omega^*(\zeta)$, $\Omega^{*\prime}(\zeta)$, $\Omega^{**\prime}(\zeta)$ in $\omega^*(\zeta)$, ki se tvorijo iz odvodov obeh analitičnih funkcij $\Omega(\zeta)$, $\omega(\zeta)$ in preslikovne funkcije $f(\zeta)$ [2].

Raziskava splošnih lastnosti analitičnih funkcij $\Omega(z)$, $\omega(z)$ ob zahtevi, da morajo biti rešitve za napetostna in deformacijska stanja v ploščah, ki zavzemajo končna ali neskončna območja enolične, vodi do formulacije njunih splošnih oblik [1,4]. Ti splošni obliki vsebujeta važne fizikalne veličine, izvirajoče iz načina obremenitve plošč na njihovih robovih in v njihovih neskončnih točkah (če zavzemajo neskončno območje). Na posameznem robu L plošče definiramo rezultanto F_z in moment $M_x + iM_y$ zunanjih sil s pomočjo obeh analitičnih funkcij $\Omega(z)$, $\omega(z)$ in ju postavimo kot koeficienta k ustreznim členom v splošnih oblikah. Prav tako se pojavljajo znane obremenitve $\tilde{xy}_\infty$, $\tilde{yx}_\infty$ in $\tilde{yy}_\infty$ v neskončni točki plošče kot koeficienti v členih v obeh splošnih oblikah $\Omega(z)$, $\omega(z)$, [1].

N. I. Muskelišvilijeva metoda reševanja elastostatičnih problemov izhaja iz formulacije robnih pogojev na robu L območja, ki ga zavzema obravnavano elastično telo. Zato moramo tudi v naši metodi formulirati znane robne pogoje na robu L plošče in jih izraziti z analitičnima funkcijama $\Omega(z)$, $\omega(z)$. Razlikujemo tri vrste osnovnih robnih problemov:

1. Prvi robni problem je podan, kadar iščemo v telesu ravnotežno napetostno stanje pri podanih zunanjih obremenitvah na njegovem robu.

2. Drugi robni problem je podan, kadar iščemo v telesu ravnotežno napetostno stanje pri podanih pomikih točk na njegovem robu.

3. Mešani robni problem je podan, kadar iščemo v telesu ravnotežno napetostno stanje, če so na delu njegovega robu podane zunanje obremenitve, na preostalem delu pa pomiki njegovih točk.

Izhajajoč iz znanih Kirchhoffovih robnih pogojev na tenkih ploščah za prvi in drugi robni problem najdemo po primerni dedukciji [1] končni formulaciji robnih pogojev. Za prvi robni problem dobimo pogojno enačbo za rob L

$$n\Omega(z) + z\bar{\Omega}'(\bar{z}) + \bar{\omega}'(\bar{z}) + n_1\bar{\Omega}''(\bar{z}) = F_1 + iF_2 + iKz + K_1\,, \tag{1.8}$$

za drugega pa podobno

$$\Omega(z) + z\bar{\Omega}'(\bar{z}) + \bar{\omega}'(\bar{z}) + n_2\bar{\Omega}''(\bar{z}) = G_1 + G_2\,. \tag{1.9}$$

Kompleksni funkciji $F_1 + iF_2$ in $G_1 + iG_2$ na robu L sta znani, saj ju določajo podane obremenitve oziroma podani pomiki na njem. S K smo označili neko realno konstanto, s K_1 pa kompleksno. Koeficienti n, n_1 in n_2 pa so podani s Poissonovim številom in debelino plošče takole [1].

$$n = -\frac{3+\nu}{1-\nu}; \quad n_1 = -\frac{2-\nu}{1-\nu}\frac{2h^2}{5}; \quad n_2 = -\frac{4h^2}{1-\nu} \tag{1.10}$$

Potrebujemo še konformno transformacijo robnih pogojev (1.8), (1.9) na enotin krog γ v ζ ravnini. Njegove točke označimo s $\sigma = e^{i\vartheta}$ in po krajši dedukciji [2] dobimo za drugi robni problem

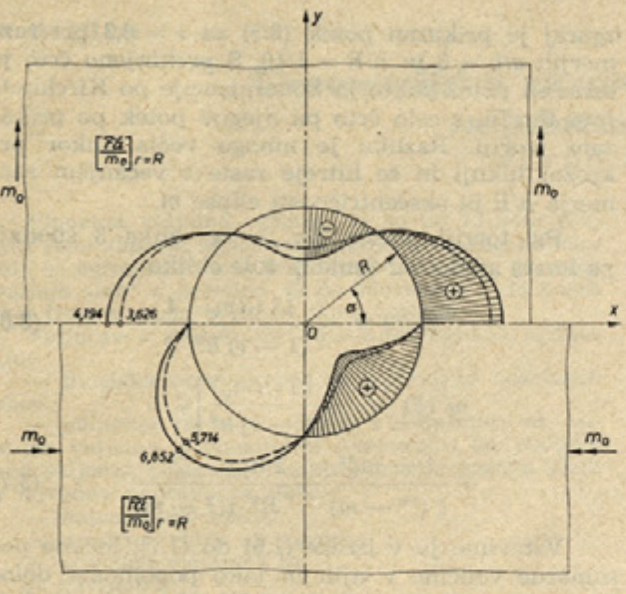
$$\Omega(\sigma) + \frac{f(\sigma)}{\bar{f}'(\sigma)}\bar{\Omega}'(\bar{\sigma}) + \bar{\omega}'(\bar{\sigma}) + n_2\,.\left\{\frac{\bar{\Omega}''(\bar{\sigma})}{[\bar{f}'(\bar{\sigma})]^2} - \frac{\bar{f}''(\bar{\sigma})\,\bar{\Omega}'(\bar{\sigma})}{[\bar{f}'(\bar{\sigma})]^3}\right\} = G_1 + iG_2\,. \tag{1.11}$$

Robni pogoji (1.8) do (1.11) so izhodne enačbe za reševanje problemov, saj iz njih določimo analitični funkciji $\Omega(z)$, $\omega(z)$ oziroma $\Omega(\zeta)$, $\omega(\zeta)$. Ko ju najdemo, je s pomočjo enačb (1.1) do (1.3) oziroma (1.5) do (1.7) popolnoma podano napetostno stanje v plošči. V nadaljevanju bomo prikazali rešitve po dveh načinih reševanja: rešitve s pomočjo potenčnih vrst in rešitve s pomočjo konformne preslikave.

2. REŠITVE S POMOČJO POTENČNIH VRST

Vzemimo za primer zmerno debelo ploščo debeline $2h$, ki zavzema neskončno, enostavno sovisno območje z okroglo luknjo radija R (slika 2). Ta plošča naj bo obremenjena v neskončni točki z enoosnim upogibom ($\tilde{xy}_\infty = m_o$) ali pa s torzijo ($\tilde{yy}_\infty = m_o$), medtem ko naj bo rob okrogle luknje vpet.

Na vpetem robu je funkcija $G_1 + iG_2$ v (1.9) nična, saj na njem niso možni niti pomiki niti zasuki. Splošni obliki analitičnih funkcij $\Omega(z)$, $\omega(z)$ razvijemo v potenčne vrste in ju vstavimo v robni pogoj (1.9). S primerjanjem koeficientov v nastali enačbi dobimo sistem pogojnih enačb, ki dajejo rešitve za neznane koeficiente v potenčnih vrstah. Ko te vstavimo v splošni obliki analitičnih funkcij, dobimo zanju končni obliki [1].



Sl. 2. *Potek faktorja koncentracije napetosti zaradi radialnega upogibnega momenta vzdolž vpetega roba okrogle luknje. Zgornji del kaže njegov potek zaradi enoosnega upogiba, spodnji del pa zaradi torzije plošče z razmerjem $h/R = 1/5$*

Pri enoosnem upogibu plošče (slika 2 zgoraj) dobimo takile funkciji

$$\Omega(z) = \frac{3\, m_o}{(1+\nu)\, h^2}\left(z - \frac{1-\nu}{1+\nu}\cdot\frac{2\,R^2}{z}\right) \tag{2.1}$$

$$\omega'(z) = \frac{6\, m_o}{(1-\nu)\, h^2}\left[z - \frac{1-\nu}{1+\nu}\cdot\frac{R^2}{z} - (R^2 - 2\, n_2 \frac{R^2}{z^3}\right] \tag{2.2}$$

Ko ju vstavimo v izraze (1.1) do (1.3) in v njih ločimo posamezne veličine, je napetostno stanje v plošči popolnoma določeno. Največje koncentracije napetosti se pojavijo na vpetem krožnem robu ($r = R$). Za faktor koncentracije napetosti zaradi radialnega vpetostnega momenta dobimo tale izraz

$$\left[\frac{\tilde{r}a}{m_o}\right]_{r=R} = \frac{1}{1+\nu} + \frac{2}{1-\nu}\cos 2\,a + \frac{6}{5}\cdot\frac{8+\nu}{1-\nu}\cdot\frac{h^2}{R^2}\cos 2\,a\,. \tag{2.3}$$

Prva dva člena na desni strani predstavljata znani rezultat za tenke plošče po Kirchhoffovi teoriji [5], medtem ko predstavlja tretji člen prispevek prikazane izboljšane teorije. Odvisen je od kvadrata razmerja med debelino plošče in premerom luknje in je tipičen za teorije debelih plošč. Faktorji koncentracije napetosti zaradi ostalih notranjih obremenitev imajo podobno obliko. Na sliki 1 zgoraj je prikazan potek (2.3) za $\nu = 0{,}3$ pri razmerju $h/R = 1/5$. S prekinjeno črto je označen potek faktorja koncentracije po Kirchhoffovi teoriji, s celo črto pa njegov potek po prikazani teoriji. Razlika je očitna, se pa hitro veča z večanjem razmerja h/R.

Pri torziji plošče (slika 2 spodaj) dobimo tile analitični funkciji

$$\Omega(z) = -\frac{12\, i m_o}{(1-\nu)\, h^2}\,\frac{R^2}{z} \tag{2.4}$$

$$\omega'(z) = -\frac{12\, i m_o}{(1-\nu)\, h^2}\left[z + (R^2 - 2\, n_2)\frac{R^2}{z^3}\right]. \tag{2.5}$$

Vstavimo ju v izraze (1.1) do (1.3) in v njih ločimo posamezne veličine. Tako je napetostno stanje v plošči popolnoma določeno. Tudi v tem primeru se pojavljajo največje koncentracije napetosti na vpetem krožnem robu ($r = R$). Za faktor koncentracije napetosti zaradi radialnega vpetostnega momenta dobimo tale izraz

$$\left[\frac{\tilde{r}a}{m_o}\right]_{r=R} = \frac{4}{1-\nu}\sin 2\,a + \frac{12}{5}\cdot\frac{8+\nu}{1-\nu}\cdot\frac{h^2}{R^2}\sin 2\,a\,. \tag{2.6}$$

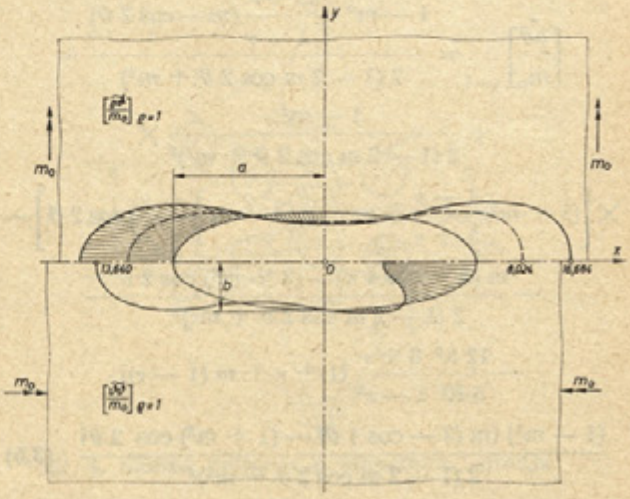
Prvi člen na desni strani predstavlja znani rezultat za tenke plošče po Kirchhoffovi teoriji [5], medtem ko predstavlja drugi člen prispevek prikazane teorije. Slednji ima podobno obliko kakor analogni člen v (2.3) in veljajo zanj vse tamkaj naštete pripombe. Potek (2.6) je prikazan v spodnjem delu slike 2.

3. REŠITVE S POMOČJO KONFORMNE PRESLIKAVE IN CAUCHYJEVIH INTEGRALOV

Za primer vzemimo zmerno debelo ploščo debeline $2h$, ki zavzema v ravnini z neskončno, enostavno sovisno območje z eliptično luknjo (slika 3). To območje s pomočjo preslikovne funkcije

$$z = x + iy = f(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right),$$
$$R > 0, \quad 0 \leq m \leq 1 \tag{3.1}$$

preslikamo v ravnino ζ, koder plošča zavzema neskončno, enostavno sovisno območje z okrogło



Sl. 3. *Potek faktorja koncentracije napetosti vzdolž vpetega roba eliptične luknje z razmerjem $a/b = 3$. Zgornji del slike kaže potek faktorja zaradi radialnega upogibnega momenta pri enoosnem upogibu, spodnji del pa potek faktorja zaradi torzijskega momenta pri torziji plošče z razmerjem $h/R = 1/10$.*

luknjo, ki ima enotin radij. S primerno izbiro parametrov R in m lahko oblikujemo eliptični rob luknje poljubne oblike in velikosti. Za $m = 0$ dobimo krožnico z radijem R, za $m = 1$ pa zarezo vzdolž osi x med točkama $\pm 2R$. Polosi eliptičnega robu luknje sta (slika 3)

$$a = R(1 + m), \quad b = R(1 - m). \tag{3.2}$$

Prikazali bomo napetostna stanja v opisani plošči, če je ta v neskončni točki obremenjena z enoosnim upogibom ali pa s torzijo, medtem ko naj bo rob njene eliptične luknje vpet.

Reševanje teče tako, da robni pogoj (1.11), v katerem je seveda funkcija $G_1 + G_2$ nična, reduciramo na funkcionalno enačbo. V ta namen uporabimo teoreme o robnih vrednostih holomorfnih funkcij in formule za izračun Cauchyjevih integralov [2, 4]. Naposled dobimo splošni obliki funkcij $\Omega(\zeta)$, $\omega(\zeta)$ za obravnavano območje.

Pri enoosnem upogibu plošče ($\tilde{xy}_\infty = m_o$, slika 3 zgoraj) dobimo takile funkciji

$$\Omega(\zeta) = \frac{3Rm_o}{(1+\nu)h^2}\left[\zeta - \left(2\frac{1+\nu}{1-\nu} + m\right)\frac{1}{\zeta}\right] \tag{3.3}$$

$$\omega'(\zeta) = \frac{6Rm_o}{(1-\nu)h^2}\left[\zeta - \frac{1-\nu}{1+\nu}(1+m^2)\frac{\zeta}{\zeta^2 - m} - \right.$$
$$\left. - \frac{1+m\zeta^2}{\zeta(\zeta^2-m)} + \frac{2n_2}{R^2}\left(1 + \frac{1-\nu}{1+\nu}m\right)\frac{\zeta^3}{(\zeta^2-m)^3}\right]. \tag{3.4}$$

Vstavimo ju v izraze (1.5) do (1.7) in po obširnem računanju ločimo posamezne veličine. Tako popolnoma določimo napetostno stanje v plošči. Tudi v tem primeru se največje koncentracije napetosti pojavljajo na vpetem eliptičnem robu ($\varrho = 1$). Za faktor koncentracije napetosti zaradi radialnega vpetostnega momenta dobimo tale dokaj dolg izraz [2].

$$\left[\frac{\tilde{\varrho\vartheta}}{m_o}\right]_{\varrho=1} = \frac{1 - m^2 - \frac{3+\nu}{1-\nu}(m - \cos 2\vartheta)}{2(1 - 2m\cos 2\vartheta + m^2)} +$$
$$+ \frac{1-m^2}{2(1-2m\cos 2\vartheta + m^2)^2} \times$$
$$\times\left[(1+m^2)\frac{1-\nu}{1+\nu} + m - 2\left(1 + m\frac{1-\nu}{1+\nu}\right)\cos 2\vartheta\right] -$$
$$- \frac{m(3+\cos 4\vartheta) - (3+m^2)\cos 2\vartheta}{2(1-2m\cos 2\vartheta + m^2)^2} -$$
$$- \frac{12h^2}{5R^2}\frac{8+\nu}{1-\nu^2}[1 + \nu + m(1-\nu)] \cdot$$
$$\frac{(1-m^2)[m(3-\cos 4\vartheta) - (1+m^2)\cos 2\vartheta]}{2(1-2m\cos 2\vartheta + m^2)^4} \tag{3.5}$$

Prvi trije členi na desni strani izhajajo iz Kirchhoffove teorije tenkih plošč, medtem ko predstavlja četrti člen prispevek prikazane teorije. Slednji je tipičen za teorije debelih plošč, kakor smo že pojasnili v poprejšnjih primerih. Na sliki 3 zgoraj je prikazan potek (3.5) za $\nu = 0{,}3$ pri razmerjih $a/b = 3$ in $h/R = 1/10$. S prekinjeno črto je označen potek faktorja koncentracije po Kirchhoffovi teoriji, s celo črto pa njegov potek po prikazani teoriji. Razlika je mnogo večja kakor pri krožni luknji in še hitreje raste z večanjem razmerja h/R in ekscentričnosti elipse m.

Pri torziji plošče ($\tilde{yy}_\infty = m_o$, slika 3 spodaj) pa imata analitični funkciji tole obliko

$$\Omega(\zeta) = -\frac{12\,iRm_o}{(1-\nu)h^2}\cdot\frac{1}{\zeta} \tag{3.6}$$

$$\omega'(\xi) = -\frac{12\,iRm_o}{(1-\nu)h^2}\left[\zeta + \right.$$
$$\left. + \frac{1+m\zeta^2}{\zeta(\zeta^2-m)} - \frac{2n_2}{R^2}\frac{\zeta^3}{(\zeta^2-m)^3}\right] \tag{3.7}$$

Vstavimo ju v izraze (1.5) do (1.7), ločimo posamezne veličine v njih in tako popolnoma določimo napetostno stanje v plošči. Na vpetem eliptičnem robu plošče ($\varrho = 1$) se pojavljajo največje koncentracije napetosti. Pri tej obremenitvi se pojavlja precejšen faktor koncentracije napetosti zaradi torzijskega vpetostnega momenta vzdolž robu in znaša [2]

$$\left[\frac{\tilde{\vartheta\vartheta}}{m_o}\right]_{\varrho=1} = \frac{12h^2}{5R^2}\cdot\frac{8+\nu}{1-\nu}\cdot$$
$$\cdot\frac{(1-m^2)[m(3-\cos 4\vartheta) - (1+m^2)\cos 2\vartheta]}{(1-2m\cos 2\vartheta + m^2)^4} \tag{3.8}$$

Znano je, da je torzijski moment vzdolž vpetega robu v Kirchhoffovi teoriji tenkih plošč vedno ničen. V (3.8) res najdemo le prispevek prikazane izboljšane teorije. Ta je zelo velik celo pri razmerju $h/R = 1/10$, kakor kaže spodnji del slike 3 in prav gotovo ni zanemarljiv v primerjavi z vplivom ostalih notranjih obremenitev na robu. V tem primeru prikazana teorija ne omogoča samo natančnejše rezultate, temveč omogoča določanje takšne obremenitve, kakršne približna klasična teorija ne more prikazati.

LITERATURA

[1] M. Muršič: Complex-Variable Approach in the Theory of Moderately Thick Elastic Plates. Publ. of the Dept. of Mech., Inst. of Math., Physics and Mech., Ljubljana 1966—1.

[2] M. Muršič: Application of Conformal Mapping in Bending of Moderately Thick Elastic Plates, prav tam, 1966—2

[3] A. C. Stevenson: On the Equilibrium of Plates. Phil. Mag. 1942, (33), str. 639.

[4] N. I. Muskelišvili: Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, 1953, Groningen.

[5] G. N. Savin: Spannungserhöhung am Rande von Löchern, 1956, Technik, Berlin.

Avtorjev naslov: dr. mgr. Milan Muršič, Fakulteta za naravoslovje in tehnologijo, Univerza v Ljubljani