

UDK 624.041.2

Računanje okvirnih konstrukcij in mrežastih nosilcev na digitalnih računalnikih

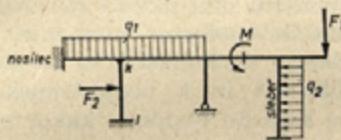
FRANC CVETAS

Po geometrijski obliki ločimo okvirne konstrukcije v dve skupini:

- odprte okvirne konstrukcije,
 - zaprte okvirne konstrukcije,
- oboje pa so lahko premične in nepremične.

1. ODPRTE OKVIRNE KONSTRUKCIJE

Na sl. 1 je prikazana ena oblika sistema odprtih okvirnih konstrukcij. To je sistem, ki ga z enkratnim prerezom glavne veje (nosilca) razdelimo na dva dela.



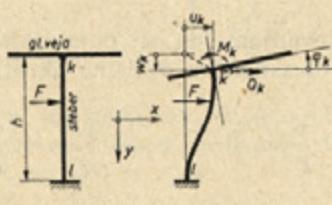
Slika 1

Nadaljnja obravnavava tega poglavja bi terjala za konkretno izračunavanje posameznih primerov, da bi se seznanili z obliko zapisov za poljsko in skočno matriko ter z začetnimi in robnimi pogoji. Odgovor na to bomo dali s skupnim pojasnilom obenem z zaprtimi okvirnimi konstrukcijami.

1.1. Vzmetna matrika

Okvirne konstrukcije so sestavljene iz nosilcev in stebrov. V naslednji obravnavi si bomo ogledali vpliv stebra na nosilec (glavno vejo).

V ta namen vzamemo npr. priključek stebra na nosilec v točki »k« (sl. 2), kjer se pod vplivom



Slika 2

obremenitve v splošnem primeru pojavljajo tri deformacije:

- u_k — premik v smeri x
- w_k — premik v smeri y
- φ_k — zasuk glede na smer x

Če upoštevamo, da so stebri nestisljivi, tedaj je $w_k = 0$. Omenjene deformacije povzročajo v vozlišču »k« t.i.

- M_k — vozliščni moment in
- Q_k — prečno silo.

Iz splošne teorije statično nedoločenih konstrukcij je znano, da povzročajo deformacije vozliščne momente in prečne sile, ki so zbrane v tabeli 1.

Skupni vozliščni moment in prečno silo zaradi deformacij in zunanje obremenitve M_{ko} , Q_{ko} zapišemo kot vsoto istih veličin z enačbama

$$\begin{aligned} M_k &= -\frac{6}{h^2} EJ_k \cdot u_k - \frac{4}{h} EJ_k \cdot \varphi_k + M_{ko} \\ Q_k &= -\frac{12}{h^3} EJ_k \cdot u_k - \frac{6}{h^2} EJ_k \cdot \varphi_k + Q_{ko} \end{aligned} \quad (2)$$

V praksi jemljemo največkrat, da so stebri nestisljivi, tj. $w_k = 0 \rightarrow N_{k^W} = 0$. Zato ostane še medsebojni vpliv stebra in nosilca, dan v enačbi (2), ki ga lahko zapišemo v matrični enačbi

$$\begin{bmatrix} M_k \\ Q_k \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{h^2} EJ_k & -\frac{4}{h} EJ_k & M_{ko} \\ -\frac{12}{h^3} EJ_k & -\frac{6}{h^2} EJ_k & Q_{ko} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ \varphi_k \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Tabela 1

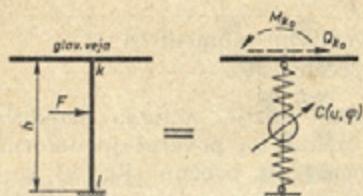
w_k	u_k	φ_k
—	$M_k^u = -\frac{6}{h^2} EJ_k \cdot u_k$	$M_k^\varphi = -\frac{4}{h} EJ_k \cdot \varphi_k$
—	$Q_k^u = -\frac{12}{h^3} EJ_k \cdot u_k$	$Q_k^\varphi = -\frac{6}{h^2} EJ_k \cdot \varphi_k$
$N_{k^W} = EA_k \frac{w_k}{h}$		→ osna sila v stebru

V zapisani matriki (3) imenujemo

$$C(u, \varphi) = EJ_k \begin{bmatrix} -\frac{6}{h^2} & -\frac{4}{h} \\ -\frac{12}{h^3} & -\frac{6}{h^2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

matriko (4) — vzmetno matriko.

Pojem vzmetne matrike izhaja od tod, ker govorimo o ovzmetenju nosilcev (glavnih vej) s stebri, ki predstavljajo vzmetne podpore (sl. 3), tj.



Slika 3

V narisani simboliki pomeni puščica za $C(u, \varphi)$, da je steber obremenjen npr. s silo F .

Oblika zapisa za posamezne vzmetne matrike je odvisna od pritrditve stebrov (vpeti ali členkasti priključek) in lege glede na glavno vejo. Zato bomo te matrike pri nadaljnji obravnavi uporabljali iz ustrezone literature.

V brezdimenzijski obliki je vzmetna matrika

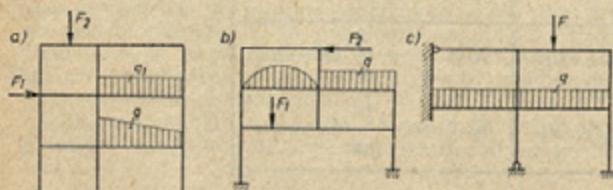
$$C^*(u^*, \varphi^*) = c \begin{bmatrix} -6\delta^2 & -4\delta \\ -12\delta^3 & -6\delta^2 \end{bmatrix}$$

Pri tem pomeni

$$c = \frac{J_{st}}{J_c}, \quad \delta = \frac{s_c}{h_{st}}$$

2. ZAPRTE OKVIRNE KONSTRUKCIJE

Z zaprtimi okviri imamo opraviti takrat, kadar moramo prerezati glavne veje (nosilce) vsaj dvakrat ali večkrat, da sistem razpade na dva dela.



Slika 4

S sl. 4 je razvidno, da se lahko v praksi pojavljajo najrazličnejše oblike zaprtih okvirov. Zato jih razdelimo v glavnem v dve skupini, tj.:

a) regularne (pravilne) okvirne konstrukcije.

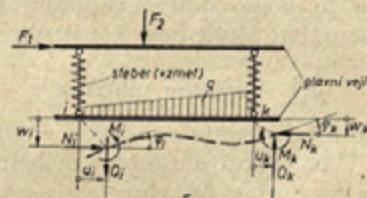
Pri teh je sistem popolnoma izpolnjen z glavnimi vejami (nosilci) in stebri (sl. 4a).

b) Iregularne (nepravilne) okvirne konstrukcije.

To so sistemi okvirov nepopolne oblike (npr. sl. 4b, c), pri katerih manjkajo posamezni stebri ali nosilci.

2.1. Spojna vzmetna matrika

a) Pod spojno vzmetno matriko razumemo matriko, ki jo dobimo iz ovzmetenja glavnih vej s stebri. Tako si ponazorimo stebre kot nekakšne vzmeti. Obremenjeni deli okvira povzročajo v posameznih vozliščih vpetostne momente, prečne in osne sile. Oglejmo si, kolikšne so te statične veličine v vozliščih i in k obojestransko vpeta na nosilca dolžine s (sl. 5)! Podobno kakor pri odprtih okvirnih konstrukcijah, kjer smo obravnavali obliko vzmetne matrike, lahko tudi v tem primeru dobimo ustrezni zapis za spojno vzmetno matriko, če upoštevamo, da povzročajo deformacije v vozliščih že omenjene vpetostne momente, prečne in osne sile.



Slika 5

Z upoštevanjem, da se pojavljajo vse deformacijske in obremenilne veličine hkrati, dobimo za

$$M_i = EJ \left(+\frac{6}{s^2} w_k + \frac{2}{s} \varphi_k - \frac{6}{s^2} w_i + \frac{4}{s} \varphi_i \right) + M_{lo} \quad (6)$$

$$N_k' = EA \left(-\frac{1}{s} u_k + \frac{1}{s} u_i \right) + N_{lo}$$

Napisane statične veličine za nosilec s krajevskema i in k lahko uporabljano tudi za stebre s priključki na glavno vejo v vozlišču i in k. Iz tega izhaja, da predstavlja enačba (6) spojno vzmetno matriko za povezavo dveh glavnih vej, zapisano v obliki:

$$\begin{matrix}
 -M_i \\
 -Q_i \\
 +M_k \\
 \pm Q_k \\
 -N_i \\
 +N_k \\
 1
 \end{matrix} =
 \begin{bmatrix}
 0 & 0 & -\frac{6EJ}{s^2} & -\frac{2EJ}{s} & \frac{6EJ}{s^2} & -\frac{4EJ}{s} & -M_{lo} \\
 0 & 0 & \frac{12EJ}{s^3} & \frac{6EJ}{s^2} & -\frac{12EJ}{s^3} & \frac{6EJ}{s^2} & -Q_{lo} \\
 0 & 0 & -\frac{6EJ}{s^2} & -\frac{4EJ}{s} & \frac{6EJ}{s^2} & -\frac{2EJ}{s} & +M_{ko} \\
 0 & 0 & -\frac{12EJ}{s^3} & -\frac{6EJ}{s^2} & \frac{12EJ}{s^3} & -\frac{6EJ}{s^2} & +Q_{ko} \\
 \frac{EA}{s} & -\frac{EA}{s} & 0 & 0 & 0 & 0 & -N_{lo} \\
 -\frac{EA}{s} & \frac{EA}{s} & 0 & 0 & 0 & 0 & +N_{ko} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix} \cdot
 \begin{bmatrix}
 u_k \\
 u_i \\
 w_k \\
 \varphi_k \\
 w_i \\
 \varphi_i \\
 1
 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Brezdimenzijska oblika matrike C_{ik} pa je pri upoštevanju po enačbi (5) za

$$\varepsilon = \frac{J_{st}}{J_c}, \quad \delta = \frac{s_c}{h_{st}}; \quad s = h_{st}$$

naslednje oblike:

$$C_{ik}^* = \varepsilon \begin{bmatrix}
 0 & 0 & -6\delta^2 & -2\delta & 6\delta^2 & -4\delta \\
 0 & 0 & 12\delta^3 & 6\delta^2 & -12\delta^3 & 6\delta^2 \\
 0 & 0 & -6\delta^2 & -4\delta & 6\delta^2 & -2\delta \\
 0 & 0 & -12\delta^3 & -6\delta^2 & 12\delta^3 & -6\delta^2 \\
 \frac{A}{J}\delta \cdot s_c^2 & -\frac{A}{J}\delta \cdot s_c^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{A}{J}\delta \cdot s_c^2 & \frac{A}{J}\delta \cdot s_c^2 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Enačbi (7) in (8) podajata splošno obliko spojne vzemetne matrike. Toda v praksi se lahko pojavljajo primeri, da je

b) $w_i = w_k = u_i = u_k = 0 \dots$ nepremični okviri. Tako vsebuje spojna vzemetna matrika samo φ , M

c) $u_i = u_k = 0 \dots$ okviri za $EA \rightarrow \infty$. Pri tem ima spojna vzemetna matrika še φ , M in w , Q .

d) $M_i = M_{lo} = 0$ in $u_i = u_k = 0 \dots$ vozlišče kot členek.

Nadaljnje praktične posebnosti okvirov so razložene pri zapisu redukcijske enačbe, začetnih, robnih in vmesnih pogojih. To je ugodno zaradi tega, ker izhajanje iz splošnega primera lahko omogoča obravnavo poljubnih posebnih primerov.

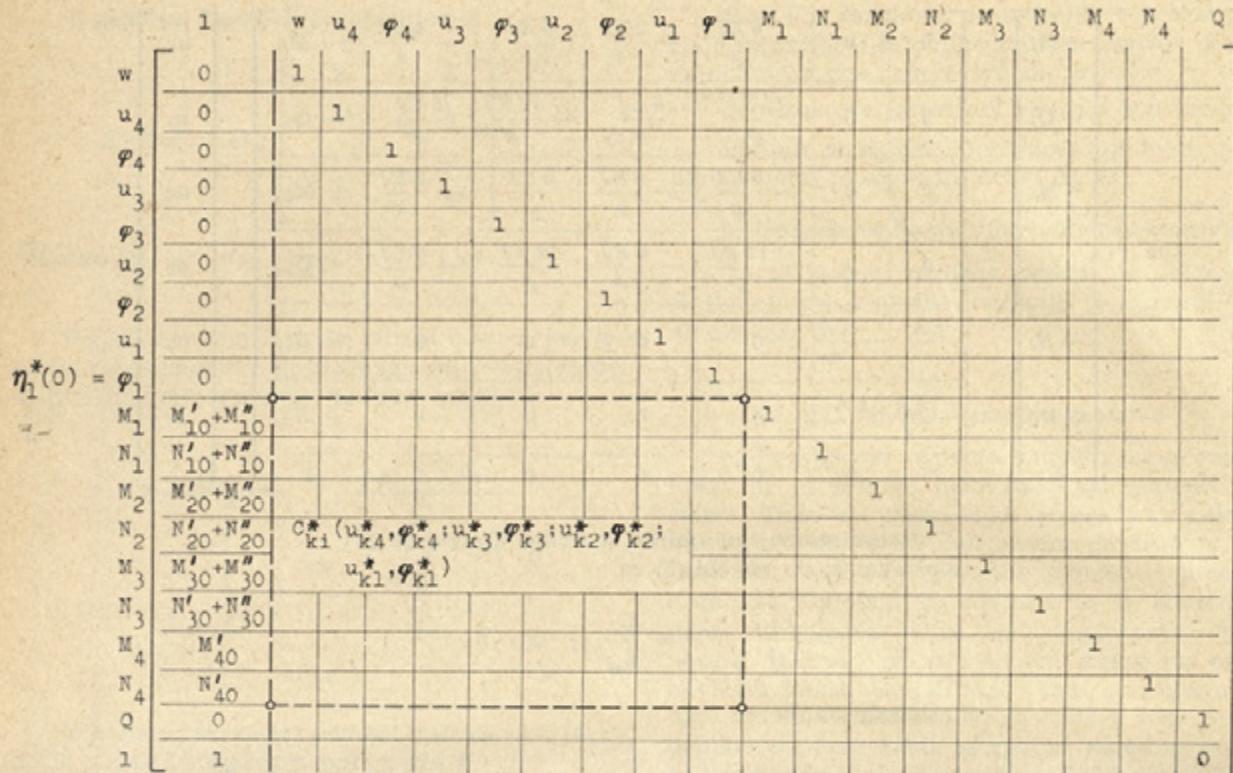
3. REDUKCIJSKA ENAČBA

Za odprte in zaprte okvirne konstrukcije, ki so lahko premične ali nepremične, lahko zapišemo skupno splošno redukcijsko enačbo v obliki

$$\eta_{n-i}^*(0) = U_n^* \cdot F_n^* \cdot U_{n-1}^* \cdot F_{n-1}^* \dots U_1^* \cdot F_1^* \cdot \eta_1^*(0) \quad (9)$$

Pri tem pomenijo:

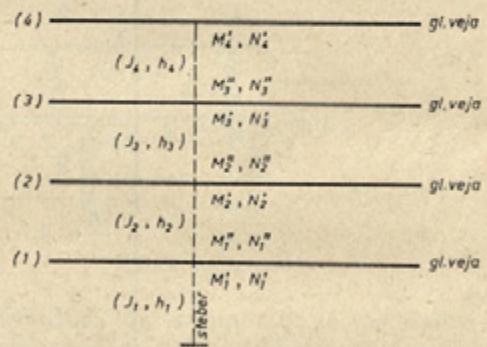
- $\eta_i^*(0)$ — začetni vektor stanja v 1. polju,
- F_i^* — poljske matrike ($i = 1, 2, 3, \dots, n$),
- U_i^* — skočne (prenosne) matrike,
- $\eta_{n-i}^*(0)$ — začetni vektor stanja v $n+1$. polju.



Slika 6

$$\begin{aligned} C_{ik}^* = & \begin{bmatrix} M_1 = M_1' - M_1'' \\ N_1 = N_1' - N_1'' \\ M_2 = M_2' - M_2'' \\ N_2 = N_2' - N_2'' \\ M_3 = M_3' - M_3'' \\ N_3 = N_3' - N_3'' \\ M_4 = M_4' \\ N_4 = N_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1' \\ N_1' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -M_1'' \\ -N_1'' \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} M_2' \\ N_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -M_2'' \\ -N_2'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_3' \\ N_3' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -M_3'' \\ -N_3'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_4' \\ N_4' \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Slika 7



Slika 8

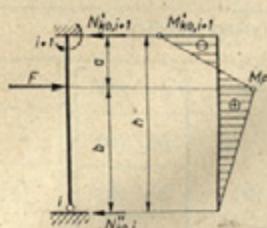
$$C_{ik}^* = \begin{bmatrix} -6\delta_1^2 t_1 & -4\delta_1 t_1 \\ -12\delta_1^2 t_1 & -6\delta_1^2 t_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^* \\ q_1^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6\delta_2^2 t_2 & -2\delta_2 t_2 & 6\delta_2^2 t_2 & -4\delta_2 t_2 \\ 12\delta_2^2 t_2 & 6\delta_2^2 t_2 & -12\delta_2^2 t_2 & 6\delta_2^2 t_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2^* \\ q_2^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6\delta_3^2 t_3 & -4\delta_3 t_3 & 6\delta_3^2 t_3 & -2\delta_3 t_3 \\ -12\delta_3^2 t_3 & -6\delta_3^2 t_3 & 12\delta_3^2 t_3 & -6\delta_3^2 t_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3^* \\ q_3^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6\delta_4^2 t_4 & -2\delta_4 t_4 & 6\delta_4^2 t_4 & -4\delta_4 t_4 \\ 12\delta_4^2 t_4 & 6\delta_4^2 t_4 & -12\delta_4^2 t_4 & 6\delta_4^2 t_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4^* \\ q_4^* \end{bmatrix}$$

all

Slika 9

$$\ell_i = \frac{J_{st_i}}{J_C} \quad i \quad \delta_i = \frac{\alpha_i}{h_{st_i}}$$

$$\begin{bmatrix} -6\delta_1^2 t_1 & -2\delta_1 t_1 & 6\delta_1^2 t_1 & -4\delta_1 t_1 \\ 12\delta_1^2 t_1 & 6\delta_1^2 t_1 & -12\delta_1^2 t_1 & 6\delta_1^2 t_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^* \\ q_1^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6\delta_2^2 t_2 & -4\delta_2 t_2 & 6\delta_2^2 t_2 & -2\delta_2 t_2 \\ -12\delta_2^2 t_2 & -6\delta_2^2 t_2 & 12\delta_2^2 t_2 & -6\delta_2^2 t_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2^* \\ q_2^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6\delta_3^2 t_3 & -4\delta_3 t_3 & 6\delta_3^2 t_3 & -2\delta_3 t_3 \\ -12\delta_3^2 t_3 & -6\delta_3^2 t_3 & 12\delta_3^2 t_3 & -6\delta_3^2 t_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3^* \\ q_3^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6\delta_4^2 t_4 & -4\delta_4 t_4 & 6\delta_4^2 t_4 & -2\delta_4 t_4 \\ 12\delta_4^2 t_4 & 6\delta_4^2 t_4 & -12\delta_4^2 t_4 & 6\delta_4^2 t_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4^* \\ q_4^* \end{bmatrix}$$

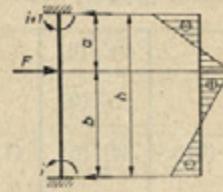


$$M_{ko,i''} = 0$$

$$M_{ko,i'+1} = \frac{F b}{2} \left(1 - \frac{b^2}{h^2} \right)$$

$$N_{ko,i''} = \frac{F}{2} \left(\frac{a}{h} \right)^2 \left(3 - \frac{a}{h} \right)$$

$$N_{ko,i'+1} = \frac{F b}{2h} \left(3 - \frac{b^2}{h^2} \right)$$

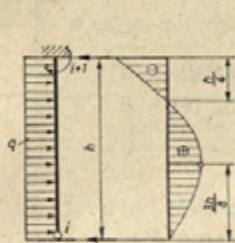


$$M_{ko,i''} = -\frac{F b a^2}{h^2}$$

$$M_{ko,i'+1} = \frac{F a b^2}{h^2}$$

$$N_{ko,i''} = \frac{F a^2}{h^3} (3b + a)$$

$$N_{ko,i'+1} = \frac{F b^2}{h^3} (3a + b)$$

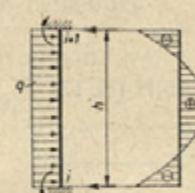


$$M_{ko,i''} = 0$$

$$M_{ko,i'+1} = \frac{q h^2}{8} \quad (10)$$

$$N_{ko,i''} = \frac{3}{8} q h$$

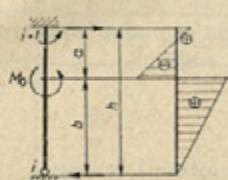
$$N_{ko,i'+1} = \frac{5}{8} q h$$



$$M_{ko,i''} = -\frac{q h^2}{12}$$

$$M_{ko,i'+1} = \frac{q h^2}{12} \quad (11)$$

$$N_{ko,i''} = N_{ko,i'+1} = \frac{q h}{2}$$

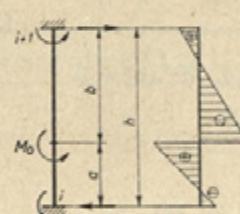


$$M_{ko,i''} = 0$$

$$M_{ko,i'+1} = \frac{M_o}{2} \left(1 - 3 \frac{b^2}{h^2} \right)$$

$$+ N_{ok,i''} = -N_{ko,i'+1} =$$

$$= \frac{3 M_o}{2h} \left(1 - \frac{b^2}{h^2} \right)$$



Slika 10

$$M_{ko,i''} = \frac{M_o b}{h} \left(\frac{3b}{h} - 2 \right)$$

$$M_{ko,i'+1} = \frac{M_o a}{h} \left(\frac{3a}{h} - 2 \right)$$

$$N_{ko,i''} = -\frac{6 M_o a b}{h^3}$$

$$N_{ko,i'+1} = \frac{6 M_o a b}{h^3}$$

Slika 11

Tudi v tem primeru (kakor pri kontinuirnih nosilcih) računamo v brezdimenzijski obliki in šele na koncu premnoževanja matrik pomnožimo izračunane neznanke s primerjalnimi veličinami.

Iz tega izhajajo:

a) Zapis začetnega vektorja stanja za 4-etažni okvirni sistem kaže slika 6.

b) V skočni (prenosni) matriki se pojavlja C_{ik}'' , ki jo zapišemo za 4 etaže v obliki po sliki 7.

Slika 8 prikazuje pomen M_i' , M_i'' in N_i' , N_i'' v posameznih vozliščih.

Torej je spojna vzmetna matrika za 4 etaže z uporabo enačbe (8) enaka obliki, ki jo kaže slika 9.

c) Enačbe obremenilnih elementov v vozliščih zaradi obremenitve stebrov, ki se pojavljajo v začetnem vektorju in skočnih (prenosnih) matrikah, so prikazane na sl. 10 in 11. V ta namen upoštevamo nekaj najznačilnejših primerov obremenitev v posameznih poljih stebrov.

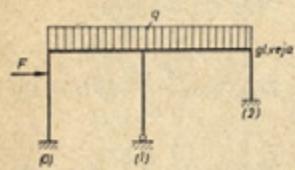
S slik 10 in 11 je razvidno, da so veličine $M_{ko,i''}$ in $M_{ko,i'+1}$ — vpetostni momenti, $N_{ko,i''}$ in $N_{ko,i'+1}$ — osne sile v glavni veji ozir. prečne sile v stebru.

Predzname je treba upoštevati za pozitivne, če je steber obremenjen s silo ali momentom z leve proti desni strani in nasprotno!

3.1. Začetni, robni in vmesni pogoji

Povrh obvladanja, kako zapisati splošno obliko poljskih in skočnih (prenosnih) matrik, je pri reševanju okvirnih konstrukcij najbolj zahtevno pravilno postavljanje začetnih, robnih in vmesnih pogojev. V ta namen si oglejmo posamezne primere:

a) Premični odprti okviri (sl. 12)

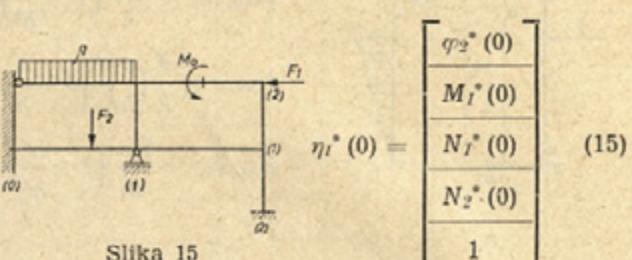


Slika 12

Začetni (pogoj) vektor

$$\eta_I^*(0) = \begin{bmatrix} u_I^*(0) \\ \varphi_I^*(0) \\ M_I^*(0) \\ N_I^*(0) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

d) Nepremični zaprti okviri (sl. 15)



Slika 15

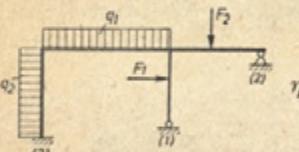
Začetni vektor

$$\begin{bmatrix} \varphi_2^*(0) \\ M_I^*(0) \\ N_I^*(0) \\ N_2^*(0) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Robna pogoja: $M_3^*(0) = 0, N_3^*(0) = 0; w_3^*(0) = 0$ Vmesni pogoji: $w_2^*(0) = 0$

b) Nepremični odprti okviri (sl. 13)

Začetni vektor



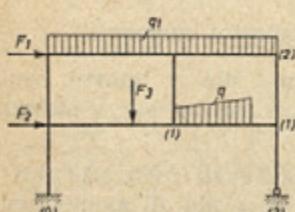
Slika 13

$$\eta_I^*(0) = \begin{bmatrix} \varphi_I^*(0) \\ M_I^*(0) = -K \cdot \varphi_I^* \\ 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Robna pogoja: $w_3^*(0) = 0, M_3^*(0) = 0$ Vmesni pogoji: $w_2^*(0) = 0$

c) Premični zaprti okviri (sl. 14)

Začetni vektor



Slika 14

$$\eta_I^*(0) = \begin{bmatrix} w_2^* \\ u_2^*(0) \\ \varphi_2^*(0) \\ u_1^*(0) \\ \varphi_1^*(0) \\ M_I^*(0) \\ N_I^*(0) \\ M_2^*(0) \\ N_2^*(0) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Robni pogoji: $w_3^*(0) = 0$ $M_{31}^*(0) = 0, N_{31}^*(0) = 0$ $M_{32}^*(0) = 0, N_{32}^*(0) = 0$ Robni pogoji: $w_3^*(0) = 0$ $M_{31}^*(0) = 0, N_{31}^*(0) = 0$ $M_{32}^*(0) = 0, N_{32}^*(0) = 0$ Vmesni pogoji: $w_2^*(0) = 0$ Po pripravljeni snovi v poglavjih od 1. do 3.1. smo se oprijeli izdelave programa P_{oh} !

3.2. Zgradba programa

Program je izdelan tako, da si podatki na traku sledijo v naslednjem vrstnem redu:

- a) robni pogoji (R),
- b) začetni vektor (η_0),
- c) geometrijski in obremenitveni podatki.

Celotni program je razdeljen v dva dela. Prvi del (označen z OKVIR—1) kopira robne pogoje (R) in začetni vektor (η_0). Iz geometrijskih in obremenitvenih podatkov izračuna poljsko matriko (F) in jo izpiše na trak. Z ustreznimi podatki za stebre sestavi skočno matriko (U), ki jo prav tako izpiše na trak. Na prvem traku dobimo torej po vrsti naslednje zapise:

$$\left\langle R, \eta_0, F_I, U_I, F_2, U_2, \dots, F_N, U_N \right\rangle$$

Drugi del programa (označen z OKVIR—2) množi začetni vektor (η_0) zaporedoma z matrikami (F_I), (U_I), ..., (F_n), (U_n) in izpisuje rezultate (tj. vektorje stanja v vozliščih) ponovno na trak. Obenem glede na zapisane robne pogoje izpisuje sistem enačb, ki ga na koncu reši. Na tem traku dobimo naslednje zapise:

$$\left\langle \eta_0, \eta_I(s), \eta_2(0), \eta_2(s), \dots, \eta_N(s), \eta_{N-1}(0) \right\rangle$$

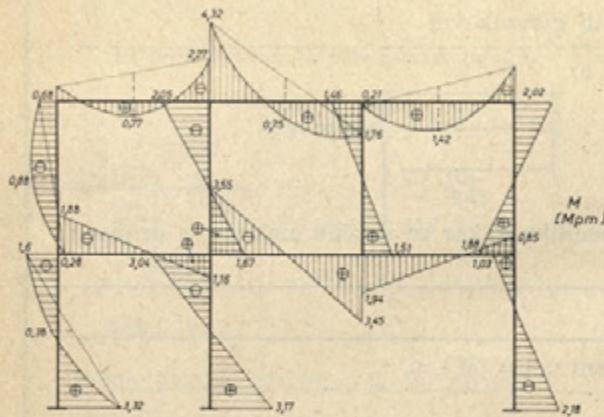
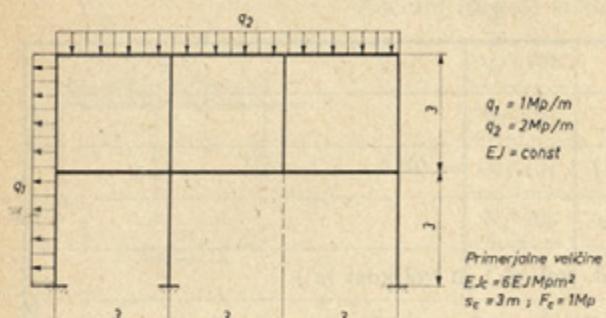
Računalnik bere ta trak in množi vektorje stanja s statističnimi veličinami, kakršne smo dobili kot rešitve sistema enačb. To so izračunani rezultati, ki jih tiska na trak ali pa neposredno na teleprinter (zaradi počasnosti to ni priporočljivo).

3.3. Navodila za uporabo programa P_{ok} in primeri

Podatki		
1.	$N' \dots (N' \leq 20)$	število polj
2.	$m' \dots (m' \leq 7)$	število etaž
3.	$EJ_c \quad s_c \quad F_c$	primerjalne veličine
4.	p'	število robnih pogojev
5.	$k_i' \quad l_i' \quad x_i$	začetek polja (k_i'), stat. vel. (l_i') in velikost (x_i)
6.	$w \ u_a \varphi_n \ u_{n-1} \varphi_{n-1} \dots u_1 \varphi_1 \ M_1 N_1 \dots M_{n-1} N_{n-1} M_n N_n Q$	začetni vektor
	Pri tem zapišemo velikost stat. vel. oz. E_o , kadar je neznanka	
7.	$T' = 1'$ ali $2'$	tip začetka priključenih glavnih vej
	<p style="text-align: center;">$T' = 1'$ $T' = 2'$</p>	
	V primeru $T' = 1'$ navedemo za stebre enake podatke kakor za skočno matriko, v primeru $T' = 2'$ pa ničesar.	
8.	Poljska matrika » F_i «	
8a.	M'	s_i' število etaž v določenem polju (M') in dolžina polja (s)
8b.	$EJ_i \quad aF \times aM_o \times a \ b \ q_a \ q_b \times N \times$	
9.	Skočna (prenosna) matrika » U_i «	
9a.	M'	t' število etaž (na levi strani) in tip podpore
	Pri tipu $t' = 3'$ navedemo Q , N , M ... velikosti oziroma E_o ... če je neznanka	
9b.	$EJ_i \quad h_i \times aF \quad q \times aM_o \times (i = 1, 2, \dots, M')$	

Iz tabele je razvidno, da je treba izpisovati samo tiste podatke, katerih vrste se končujejo z označbo treh vertikalnih črt!

1. primer



Slika 17

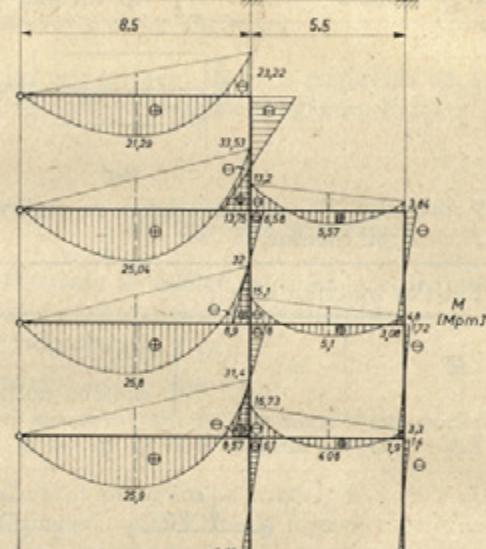
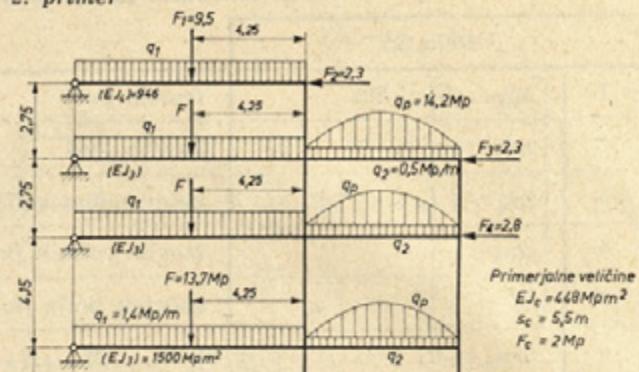
Podatki za izračun

3'	2'		
6	3	1	
6'			
2'	1'	0	
4'	1'	0	
4'	6'	0	
4'	7'	0	
4'	8'	0	
4'	9'	0	
0	E0	E0	E0
1'			
2'	1'		
1	3	X X -1	X X
1	3	X X -1	X X
2'	3		
1	X X	X X	X X
1	X X	X X	X X
2'	1'		
1	3	X X X X	X X
1	3	X X X X	X X
2'	3		
1	X X	X X	X X
1	X X	X X	X X
2'	3'		
0	0	0	
1	3	X X X X	X X
2'	3		
1	X X	X X	X X
1	X X	X X	X X
2'	1'		
1	3	X X X X	X X
1	3	X X X X	X X

Cas računanja in izpisovanja rezultatov
15 min.

Izračunanih rezultatov, ki jih izpiše teplotničar, zaradi omejenega prostora v tem članku ne bomo priložili! Vendar menim, da je potrebno pokazati tudi način pisanja podatkov za izračun (gl. 1. in 3. primer). To pa zato, ker je to delo odvisno od človeka, drugo računanje opravijo stroj sam. Vsi prikazani primeri so vzeti iz prakse in ponazarjajo sestavne sisteme konstrukcij.

2. primer

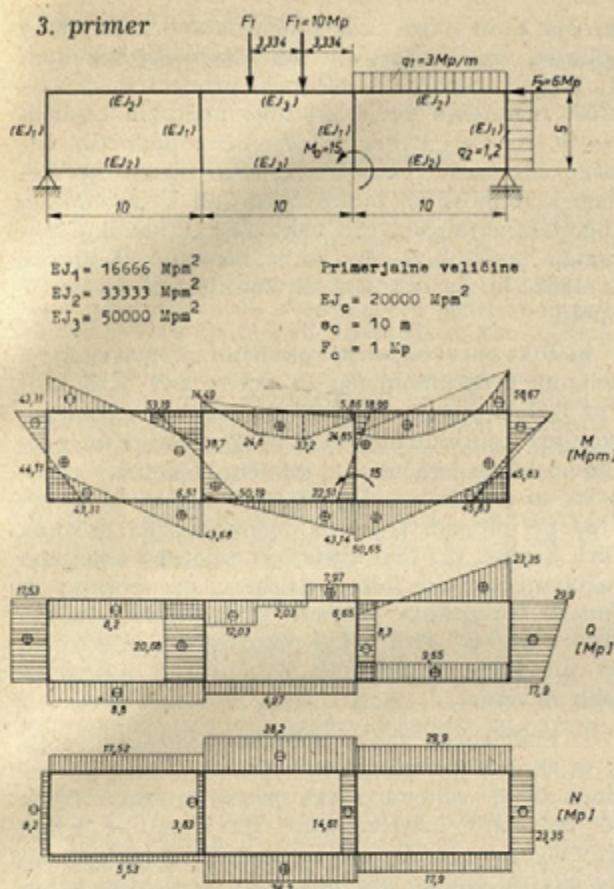


Slika 18

Podatki za izračun

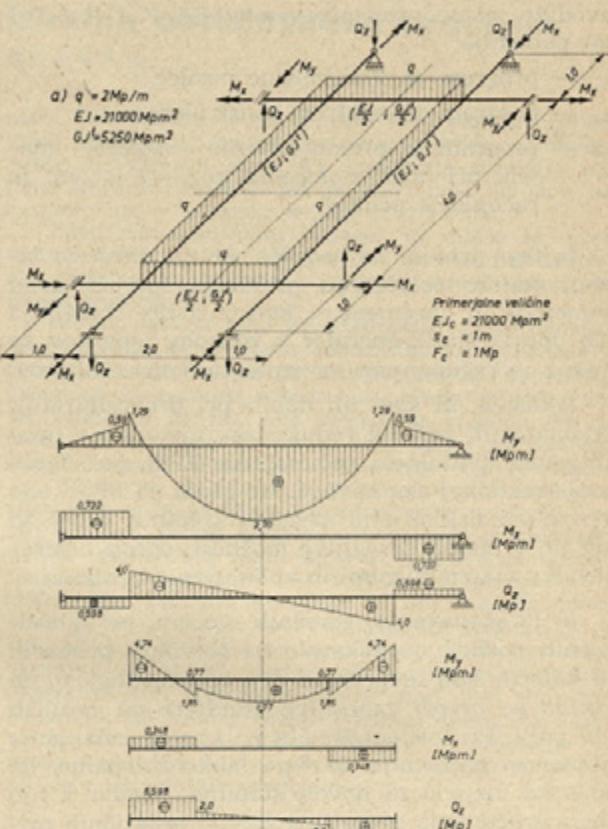
2'	4'			
448	5,5	2		
10'				
2'	1'	0		
2'	16'	0		
3'	17'	0		
3'	1'	0		
3'	10'	0		
3'	11'	0		
3'	12'	0		
3'	13'	0		
3'	14'	0		
3'	15'	0		
0	0	E0	0	E0
2'				
4'	8,5			
1500	4,25	13,7	X X X X	8,5 0 1,4 1,4 X X
1500	4,25	13,7	X X X X	8,5 0 1,4 1,4 X X X X
1500	4,25	13,7	X X X X	8,5 0 1,4 1,4 X X X X
946	4,25	9,5	X X X X	8,5 0 1,4 1,4 X X X X
4'	1'			
1095	4,15	X X X X		
1095	4,15	X X X X		
1095	2,75	X X X X		
1095	2,75	2,75	-2,3	X X X X
3'	5,5			
1500	X X X X	5,5 4,1	0,5 4 4,1	1,4 4 4 1,4 0 4 0,5 X X X X
1500	X X X X	5,5 4,1	0,5 4 4,1	1,4 4 4 1,4 0 4 0,5 X X X X
1500	X X X X	5,5 4,1	0,5 4 4,1	1,4 4 4 1,4 0 4 0,5 X X X X
3'	1'			
448	4,15	X X X X		
448	4,15	4,15	-2,8	X X X X
448	2,75	2,75	-2,3	X X X X

3. primer



Slika 19

4. primer



Slika 20

Podatki za izračun

3' 2'								
200000	10	1						
5'								
4' 1' 0								
4' 6' 0								
4' 7' 0								
4' 8' 0								
4' 9' 0								
0 E0 E0 0 E0 0 E0 0 0 E0								
1'								
2' 3'								
0 0 0								
16666 5 × × ×								
2' 10								
33333 × × × ×								
33333 × × × ×								
2' 3'								
0 0 0								
16666 5 × × ×								
2' 10								
50000 × × × ×								
50000 3,33333 10 6,66666 10 × × × ×								
2' 3'								
0 0 0								
16666 5 × × 0 15 ×								
2' 10								
33333 × × × ×								
33333 × × 10 0 3 3 × ×								
2' 3'								
0 0 0								
16666 5 5 -6 × -1,2 × ×								

Potek računanja je prikazan z redukcijsko enačbo, in sicer za vzdolžni nosilec v obliki:

$$\eta_3^*(0) = F_2^* U_I^* F_I^* \eta_I^*(0)$$

Prikazani mrežasti nosilec (npr. avtomobilsko podvozje) smo računali s programom P_{n5} .

Podatki za izračun

4' 7' 3'

Nato sledijo matrike $\eta_I^*(0)$, F_I^* , U_I^* in F_2^* .

Zatem pa robni pogoji

3'							
3' 2' 0							
3' 4' 0							
3' 5' 0							

Dobijeni rezultati so v brezdimenzijski obliki. Prave velikosti dobimo s premnoževanjem s primerjalnimi veličinami (glej dijagrame na sl. 20).

3.4. Povzetek izkušenj o redukcijski metodi

Z izdelanimi programi lahko izračunamo vse na digitalnem računalniku. Tako je potrebno za posamezne statične probleme (nosilce, okvire) izpi-

sati le podatke (geometrijske in obremenitvene) po navodilih za uporabo programov P_k , P_{ok} , P_{ns} . Pri tem pomenijo:

P_k — program za kontinuirne nosilce,

P_{ok} — program za okvirne konstrukcije,

P_{ns} — program za premnoževanje sistemov matrik pri opisu določenih pogojev (s tem je računan 4. primer).

Iz tega izhaja, da zadošča, če naročnik za izračun statike določenega problema sporoči samo geometrijo in obremenitve konstrukcije. Nadaljnje delo opravi statik-operater z izpisom podatkov za izračun in računanjem ter izpisovanjem rezultatov.

Izkušnje, ki smo jih dobili pri programiranju matematičnih zapisov redukcijske metode na uporabljenem digitalnem računalniku Z-23, pa so pokazale marsikaj zanimivega. Ne glede na to ali ono smo se pri našem delu zavedali začetnih težav, ki smo jih v mejah dosegljive možnosti sproti odstranevali z matematičnimi in aplikativnimi prijemi.

a) Izračunavanje statičnih veličin pri kontinuirnih nosilcih je pokazalo na številnih primerih (od katerih smo tu priložili dva najznačilnejša), da dobimo še precej zanesljive rezultate na nosilcih z 10 polji. Pri večjem številu polj pa se zmanjšuje natančnost računanja. Iz tega lahko sklepamo, da računska metoda ni dovolj stabilna, vendar z njo lahko izračunamo precejšnje število praktičnih primerov. Na vprašanje, kako izračunavamo statične veličine, smo v članku že nekaj omenili. Osnovno je, da imamo na voljo toliko robnih in vmesnih pogojev, kolikor je začetnih in skočnih veličin. V ta namen mora biti program izdelan tako, da se pri pozivu številke k_i vstavi statična veličina l_i' velikosti x_i in vse to shrani v spominu stroja kot vektor vrstice, nakar z izpisom enačb, kjer se pojavljajo neznanke X_i , izračunamo z Gaussovim algoritmom ustreerne neznanke. Vse vmesno pozivanje pogojev shranjujemo v stroju, dokler se ne pojavi čas izračunavanja statičnih veličin na začetku in koncu polja.

Kontrola računske natančnosti je obsežena v predpisanih robnih in vmesnih pogojih, katerim moramo zadostiti. Nadaljnja kontrola je ravnotežje, tj. vsota vseh sil in vsota vseh momentov glede na poljubno izbrano smer oziroma prijemališče mora biti enaka nič.

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{i(0)} = 0$$

Glede številčne stabilnosti izračuna lahko trdimo, da jo do določene meje popravimo, če vložimo podatke s števili, ki so čim manj zaokrožena, in računamo s čimveč decimalnimi mestami. Z rastočim indeksom postajajo torej vektorji (neznanke) vedno bolj linearne odvisni. To se pravi: determinanta sistema postaja vedno manjša, kar otežuje izračun

vektorja X_i in s tem tudi končni izračun. Številčna stabilnost upada torej z naraščajočim številom polj. Hkrati so pokazali računski primeri, da je stabilnost računanja večja pri togo podprtih nosilcih ($k_i \rightarrow \infty$, $K_i \rightarrow \infty$) kakor pri elastično podprtih. Linearne odvisnosti vektorjev, ki tako zmanjšuje številčno stabilnost, bi lahko zmanjšali s postopkom ortogonalizacije osnovnih vektorjev (v nekako razširjenem smislu). S tem so je ukvarjal H. Rieche leta 1962, ko je obravnaval kontinuirni nosilec z 10 polji.

b) Pri obravnavanju okvirnih konstrukcij z izdelanim programom P_{ok} za okvire z $N' \leq 20$ polj in $m' \leq 7$ etaž smo naleteli na podobne probleme kakor pri kontinuirnih nosilcih. Z omenjenim programom lahko izračunamo statične veličine v okvirih, ki so popolnoma izpolnjeni z nosilci in stebri ali pa pri okvirih z manjkajočimi nosilci oziroma stebri. Seveda pri tem obstajajo določene omejitve. Izračunani primeri kažejo možnost za uporabo izdelanega programa. Zaradi skopo odmerjenega prostora smo priložili nekaj preprostih primerov, ki smo jih vzeli iz številnih izračunanih najrazličnejših okvirov.

Iz matričnega zapisa začetnega vektorja, poljske in skočne (prenosne) matrike za okvire je razvidno, da je njihova oblika precej splošna. To je bilo potrebno izdelati zato, da lahko z njimi obravnavamo premične in nepremične odprte in zaprte okvire. Oblike obremenilnih elementov v koloni začetnega vektorja, poljske in prenosne matrike so prirejene tako, da stroj avtomatično izračuna ustrezno velikost glede na dano obremenitev v polju nosilca ali stebra in vozlišču.

Računske izkušnje so pokazale, da dobimo še dobre rezultate pri okvirih s 6 polji in 7 etažami. Pri obsežnejših sistemih pa se začenjajo pojavljati odstopki zaradi številčne nestabilnosti računske metode. Pričakujemo, da bomo z računalnikom IBM 1130 lahko reševali obsežnejše primere z izdelano računsko metodo ali pa z uporabo drugih metod. Vsekakor bomo pri nadaljnjih raziskavah težili za iskanjem najbolj racionalnih računskih metod in izdelavo ustreznih programov.

LITERATURA

- [1] R. Kersten: Das Reduktionsverfahren der Baustatik, Springer-Verlag, Berlin 1962.
- [2] E. Prelog: Uporaba elektronskih računalnikov v konstrukcijski mehaniki, IMFM, Ljubljana 1966.
- [3] J. Robinson: Structural Matrix Analysis for the Engineer, John Wiley & Sons, New York 1966.
- [4] Ping-Chun Wang: Numerical and Matrix Methods in Structural Mechanics, John Wiley & Sons, New York 1966.
- [5] H. J. Laursen: Matrix Analysis of Structures, McGraw-Hill, New York 1966.

Avtorjev naslov:

mag. ing. Franc Cvetaš,
Fakulteta za strojništvo
Univerze v Ljubljani