UDK 621.73.04+621.77

Aproksimacije pri analitičnih obravnavah tehničnih preoblikovalnih procesov kovin

VINCENC ČIŽMAN

Največji del ulitega jekla povsod po svetu (okrog 90 %) nadalje predelujejo z raznimi tehničnimi preoblikovalnimi postopki, npr. s stiskanjem, kovanjem, valjanjem, vlečenjem, iztiskanjem itd. Zaradi tega je razumljiv skokovit napredek teorije o plastičnem preoblikovanju v zadnjih 20 letih. Teoretične rešitve pri obravnavanju plastičnega tečenja kovine so bile še do nedavna preveč kompleksne in po obliki neprimerne za praktično aplikacijo v pogojih proizvodnje. Zato se je v tem času po eksperimentalnih laboratorijskih preskusih razvila vrsta empiričnih obrazcev, ki so praktično veljavni v strogo odrejenih enakih pogojih in imajo vsi splošno obliko:

$$F = \zeta\, k_{ws}\, A_d$$

pri čemer pomenijo:

F — preoblikovalno silo,
k_{ws} — srednjo vrednost preoblikovalne trdnosti kovine,
A_d — dotikalno površino med preoblikovano kovino in orodjem,
ζ — korekcijski faktor.

V raziskavah na področju matematičnega formuliranja preoblikovalnih procesov, ki so časovno zaostajala za eksperimentalnimi, so se pokazale velike in nepremostljive težave pri simultanem reševanju trodimenzionalnih ravnotežnih enačb in pogojnih enačb plastičnosti. Sistemi ravnotežnih enačb sestavljajo zaradi večjega števila neznank (komponent napetosti) sami zase statično nedoločljive sisteme, tako da so bile kot dodatni odnosi postavljene pogojne enačbe plastičnosti, ki dajejo zvezo med glavnimi napetostnimi komponentami in fizikalnimi konstantami preoblikovane kovine.

Prva aproksimacija, ki je omogočila nadaljevanje matematičnih prijemov pri obravnavanju preoblikovalnih procesov, je bila ta, da so bili posamezni preoblikovalni procesi reducirani na ravninske deformacijske procese tako, da je veljalo izraženo npr. s kartezijskimi koordinatami:

$$\varepsilon_z = 0, \text{ ozir. } \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0,\ \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0;$$

Izjemno ni dopustna ta redukcija za tele preoblikovalne procese:

— kovanje in valjanje debelih kovinskih plošč (slabov),
— iztiskanje kompleksnih asimetričnih profilov,
— kovanje kompleksno asimetričnih izkovkov,

ker se pojavljajo deformacije tudi v smeri, o kateri pri ravninski deformaciji sodimo, da je nična. Vse druge preoblikovalne procese pa lahko reduciramo na obravnavanje kot ravninske deformacijske procese.

Z redukcijo preoblikovalnih procesov na ravninske deformacijske procese dobimo ravnotežne enačbe v posameznih izbranih koordinatnih sistemih:

a) za kartezijske koordinate s tem, da je:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0, \qquad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

b) za cilindrične koordinate s tem, da je:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0, \qquad \tau_{rz} = \tau_{\varphi z} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2\,\tau_{r\varphi}}{r} = 0$$

c) za sferične (krogelne) koordinate s tem, da je:

$$\tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi\theta} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\left[2\,\sigma_r - \left(\sigma_\theta + \sigma_\varphi\right) + \tau_{r\theta}\,\mathrm{ctg}\,\theta\right] = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\left[3\,\tau_{r\theta} + \left(\sigma_\theta - \sigma_\varphi\right)\mathrm{ctg}\,\theta\right] = 0 \tag{3}$$

Pri preoblikovalnih procesih, ki jih obravnavamo v cilindričnih koordinatah (vlečenje in potiskanje skozi votlico), lahko izvedemo še nadaljnjo redukcijo ravnotežne enačbe, če lahko predpostavimo, da so napetostne komponente neodvisne od kota φ, tako da je:

$$\tau_{r\varphi} = \tau_{z\varphi} = 0$$

in dobimo tako ravnotežni enačbi za osno simetričen preoblikovalni proces:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \tag{4}$$

V posebnem primeru kadar velja še, da je:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0, \qquad \tau_{rz} = 0$$

pa nam ostane samo ravnotežna enačba v obliki:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0 \tag{5}$$

Ravnotežne enačbe (1, 2, 4) dajejo zvezo obeh napetostnih komponent z obema koordinatama, vendar je obravnava problema nadalje rešljiva le, če so tangencialne komponente, to je strižne napetosti, delujoče na kontaktnih ploskvah preoblikovanca, enake nič oziroma zanemarljive ali pa konstantne. Pri preoblikovalnih procesih vemo, da trenje med orodjem in preoblikovancem, ki povzroča tangencialne komponente napetosti po kontaktni površini, ni konstantno ali nič, temveč se menjava skladno z zakonom, po katerem lahko sklepamo le, da doseže na kontaktni površini maksimalno vrednost in je v sredini preoblikovanega prereza po predpostavki enako nič. Zaradi tega uvajamo nadaljnjo poenostavitev problema s tem, da do-

ločamo vrednosti napetostnih komponent ne za vsako točko preoblikovanega dela, temveč le za vsako točko na kontaktni površini. Če poznamo torej razdelitev normalnih napetosti po kontaktni dolžini med orodjem in preoblikovancem, lahko z integriranjem (normalnih napetosti po dotikalni dolžini) dobimo neposredno vrednost potrebne preoblikovalne sile na enoto širine z:

$$F = \int_{o}^{l = x_1} \sigma_n (x)\, dx \qquad (6)$$

Ta nadaljnja aproksimacija povsem zadovoljuje pri izračunu preoblikovalne sile za praktične potrebe, kar so potrdile tudi eksperimentalne meritve pri določenih razmerjih med prosto in kontaktno površino preoblikovanca. S to predpostavko o razdelitvi tangencialnih napetosti po preoblikovanem prerezu izvajamo za obravnavo preoblikovalnih procesov nadaljnjo aproksimacijo, ki privaja do uporabe aproksimativnih ravnotežnih enačb za obravnavo procesov.

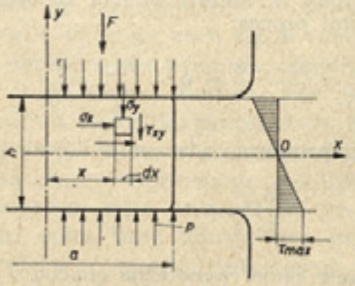
Kot primer take aproksimacije naj rabi reducirani ravninski deformacijski proces stiskanja kovine med dvema ravnima ploščama. Plastični tok kovine naj bo po prvi aproksimaciji ravninski, po drugi pa naj bo predpostavljena linearna razdelitev tangencialnih komponent napetosti po preoblikovanem prerezu.

Tako dobimo s situiranim koordinatnim sistemom (kartezijske koordinate) s prvo izbrano ravnotežno enačbo (1), ki jo integriramo v mejah od $y_1 = 0$ do $y_2 = h/2$

$$\int_{o}^{h/2} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\, dy + \int_{o}^{h/2} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\, dy = 0 \qquad (7)$$

po izvršeni integraciji aproksimativno ravnotežno enačbo v obliki:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{2\,\tau}{h} = 0 \qquad (8)$$

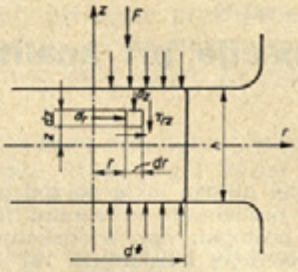


Sl. 1. *Stiskanje kovine med dvema ploščama*

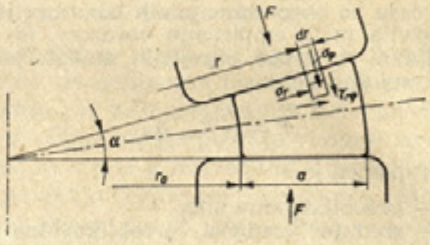
Če stiskamo med dvema ploščama cilindrični del kovine z višino h in premerom d, izberemo za nastavitev ravnotežne enačbe cilindrični koordinatni sistem. Predpostavimo, da se tangencialne napetosti $\tau_{rz} = \tau_{zr}$ menjajo od 0 do $h/2$, tako da dosežejo pri $h/2$ maksimalno vrednost τ.

S predpostavko zaradi geometrične oblike stiskanca, da sta σ_r in σ_φ neodvisni od spremembe koordinate z, smo problem reducirali na osno simetrični problem in z integracijo prve ravnotežne enačbe (2) v mejah od 0 do $h/2$ dobimo ravnotežno enačbo v obliki:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2\,\tau}{h} + \frac{(\sigma_r - \sigma_\varphi)}{r} = 0 \qquad (11)$$



Sl. 2. *Stiskanje valjastega dela kovine med dvema ploščama*



Sl. 3. *Stiskanje kovine med naklonjenima ploščama*

Pri obravnavanju plastičnega stiskanja kovine med dvema naklonjenima hrapavima ploskvama bomo z redukcijo problema na ravninski deformacijski proces izbrali polarni koordinatni sistem. Tangencialna napetost bo dosegla maksimalno vrednost pri kotu $\alpha/2$. Če integriramo prvo ravnotežno enačbo (2) v mejah od 0 do $\alpha/2$, dobimo aproksimatvno ravnotežno enačbo za ta primer:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2\,\tau}{r\,\alpha} + \frac{(\sigma_r - \sigma_\varphi)}{r} = 0 \qquad (12)$$

Pri obravnavi kovanja kovinskega kosa v višino h in dolžino a spet izvedemo podobno redukcijo s predpostavko neširjenja v eni glavni smeri.

Z upoštevanjem sil delujočih na elementarni del kovanca dobimo ravnotežno enačbo:

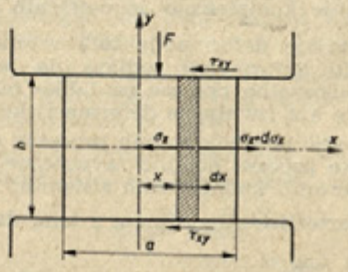
$$-\sigma_x h + (\sigma_x + d\sigma_x)\, h - 2\,\tau_{xy}\, dx = 0$$

ozir.

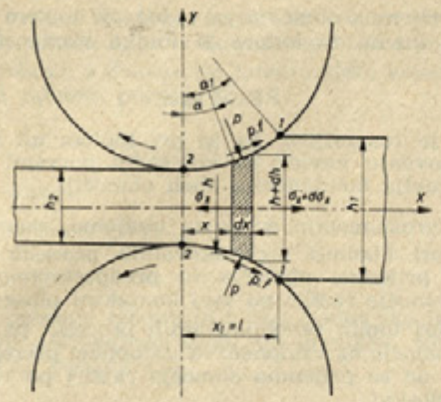
$$d\sigma_x \,.\, h - 2\,\tau_{xy}\, dx = 0 \qquad (13)$$

Ker tangencialno napetost lahko izrazimo s silo trenja, je:

$$d\sigma_x \,.\, h - 2\,.\, p\, f\, dx = 0 \qquad (14)$$



Sl. 4. *Kovanje kovine*



Sl. 5. *Valjanje kovine*

S situiranjem koordinatnega sistema v sredino kovanca, ker teče plastični tok kovine od sredine navzven v smeri $\pm x$ osi, velja ravnotežna enačba za levi ali desni elementarni del

$$d\sigma_x \cdot h \pm 2\,p\,f\,dx = 0 \qquad (15)$$

Podobno pridemo do aproksimativne ravnotežne enačbe pri obravnavanju preoblikovalnega procesa z valjanjem. Tudi tu izvršimo najprej redukcijo na ravninski reformacijski proces s tem, da obravnavamo proces valjanja kot valjanje brez širjenja in nato rezultat obravnave množimo s širino dotikalne ploskve, tako da dobimo skupno silo valjanja. Po fizikalnem modelu tega postopka preoblikovanja in njegove geometrije situiramo kartezijski koordinatni sistem, kakor je razvidno na sliki 5 s tem, da prikazuje os x zanimivo smer za nastavitev ravnotežne enačbe. Če upoštevamo vse sile, ki delujejo na elementarni del valjanca, in postavimo ravnotežno enačbo za smer x, dobimo:

$$h\,d\sigma_x + \sigma_x dh + 2p\,(\mathrm{tg}\,\alpha \pm f)\,dx = 0 \qquad (16)$$

Po uvedenih geometričnih aproksimacijah zaradi majhnega kota α

$$\sin\alpha = \frac{x}{R} \approx \mathrm{tg}\,\alpha \approx \alpha, \quad \cos\alpha \approx 1$$

in če izrazimo višino h z:

$$h \approx h_2 + \frac{x^2}{R}$$

ter iz tega:

$$dh = 2\frac{x}{R}\,dx$$

in to vnesemo v izraz (16), dobimo:

$$h\,\frac{d\sigma_x}{dx} + 2\,\sigma_x\,\frac{x}{R} + 2p\left(\frac{x}{R} \pm f\right) = 0 \qquad (17)$$

Izraz (17) je ena od oblik aproksimativne ravnotežne osnovne enačbe problema valjanja, pri kateri smo zaradi majhnega znosa komponento vztrajnostne sile v smeri osi x zanemarili.

V enačbi (17) je v zadnjem členu vrednost f podana z $\pm f$, kar je posledica kinematičnih razmer v preoblikovalnem prostoru. Hitrost valjanca je od vstopnega prereza proti sredini preoblikovalnega prostora manjša, od izstopnega prereza proti sredini pa večja od horizontalne komponente obodne hitrosti valjev $u \cos\alpha$. Zaradi tega nastajajo po obeh kontaktnih ploskvah nasprotno usmerjene torne sile, ki povzročajo od vstopnega prereza proti sredini zaostajalno, od izstopnega prereza proti sredini pa prehitevalno območje v preoblikovalnem prostoru, kar se izraža v gornji ravnotežni enačbi (17).

Pri plastičnem preoblikovanju z vlečenjem ali potiskanjem skozi okroglo votlico (pri vlečenju žice, paličastega jekla itd.) imamo podobno kakor pri valjanju po obodu delujoč normalni tlak p in silo trenja $p\,f$, le da je tukaj elementarni del preoblikovanca prisekan stožec in namesto trenja tukaj osna, vlečna ali potisna sila pomika preoblikovanec v smeri $-x$ dalje.

Geometrija procesa — drugače kakor pri valjanju — še narekuje, da so vse zunanje sile razdeljene osno simetrično.

V ravnotežni enačbi za elementarni del bomo upoštevali za zanimivo smer x:

— sili napetosti $-\sigma_x$, $d\sigma_x$,
— komponento rezultante normalnega tlaka p,
— komponento rezultante tornih sil po obodu:

$$(\sigma_x + d\sigma_x)\frac{\pi}{4}(D + dD)^2 - \sigma_x\frac{\pi}{4}D^2 = \frac{\pi D}{4}(D\,d\sigma_x + 2\,\sigma_x\,dD)$$

$$\int_0^{2\pi} p\,\frac{D}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha\,dx\,d\Theta = \frac{p\pi}{2}\,D\,dD$$

$$\int_0^{2\pi} p\,f\,\frac{D}{2}\,dx\,d\Theta = \frac{p\,f\,\pi\,D}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}\,dD$$

S seštevkom vseh treh sil v smeri x ter ureditvijo dobimo ravnotežno enačbo za vlečenje ali potiskanje kovine skozi votlico:

$$D\,d\sigma_x + 2\,\sigma_x\,dD + 2\,p\left(1 + \frac{f}{\mathrm{tg}\,\alpha}\right)dD = 0 \qquad (18)$$

Ker sta pri obravnavi posameznih vrst plastičnih preoblikovalnih procesov kovin zanimiva predvsem dva osnovna problema, iz katerih nato izračunavamo vrednost preoblikovalne sile in potrebne moči, skušamo najprej določiti:

— matematično formulacijo za razdelitev normalnih napetosti po kontaktnih površinah med orodjem in preoblikovancem, kar dosežemo s simultano rešitvijo postavljenih ravnotežnih enačb, pogojnih enačb plastičnosti z znanimi robnimi pogoji,

— funkcijsko odvisnost preoblikovalne trdnosti kot fizikalne lastnosti kovine od stopnje preoblikovanja, preoblikovalne hitrosti in temperature.

Kot pogojno enačbo plastičnosti za tehnične preoblikovalne procese, pri katerih imamo opravka z znatnimi deformacijami, izberemo Mises-Henckyjev pogoj, izražen z glavnimi napetostmi:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\,\sigma_s^2 \qquad (19)$$

ki ga enako kakor obravnavani proces sam ob nastavitvi ravnotežnih enačb reduciramo na ravninski pogoj plastičnosti s tem, da upoštevamo karakteristiko ravninskega deformacijskega procesa in določimo vrednost

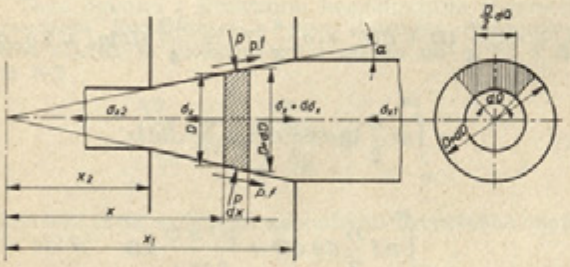
glavne napetosti, v smeri katere smo vzeli, da je deformacija nična — po St. Venantovem zakonu, podanem v tenzorski obliki:

$$T_{ii}^{D} = \left(\frac{2\mu}{dt}\right) d\,E_{ii} \tag{20}$$

oziroma

$$\left\| \begin{matrix} \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left(\frac{2\mu}{dt}\right) \left\| \begin{matrix} d\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & d\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & d\varepsilon_3 \end{matrix} \right\| \tag{20a}$$



Sl. 6. *Vlečenje (potiskanje) kovine*

Tretji odnos, ki omogoča določitev (če smo izbrali, da je $d\varepsilon_3 = 0$),

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

daje s substitucijo v (19) obliko pogojne enačbe plastičnosti za ravninski deformacijski proces:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s = \sigma_s' = k_{fe} = k_e \tag{21}$$

Preden se lotimo reševanja osnovnih diferencialnih ravnotežnih enačb s pogojnimi enačbami plastičnosti, je treba upoštevati še pomemben vpliv tornih sil, ki povzročajo na kontaktnih površinah s preoblikovancem po znosu lahko različne vrednosti tangencialnih napetosti τ. Prekoračenje določene mejne tangencialne trdnosti kovine ima ob plastičnem preoblikovanju kovine to posledico, da ob plastičnem toku material ne drsi več po orodju v smeri toka, temveč da se sloj določene debeline kovine prime orodja, znotraj kovine pa po določenih ploskvah prestriže. Tako imamo glede na dosežene vrednosti tangencialnih napetosti po kontaktnih površinah kot ekstreme:

— drsna območja, navadno pri hladnem preoblikovanju kovin, pri katerih velja pogoj:

$$f\,p_n \leqslant \tau_{max} \tag{22}$$

— prijemna območja, navadno pri toplem preoblikovanju kovin, za katere je mejna vrednost τ presežena:

$$f\,p_n \geqslant \tau_{max} \tag{23}$$

Seveda je razumljivo, da se pri toplem ali hladnem preoblikovanju kovine pa kontaktni površini največkrat pojavlja kombinacija obeh območij.

Z aproksimacijo, ki jo tu uvajamo, zanemarimo:

— pri hladnih preoblikovalnih procesih majhna srednja prijemna območja in predpostavimo, da se drsno območje razširi po vsej kontaktni ploskvi,

— pri toplih preoblikovalnih procesih pa majhna drsna območja na vstopnem in izstopnem prerezu s pridržkom, da se prijemno območje razširi po vsej kontaktni ploskvi.

Po Unksovu je mejna strižna trdnost za čisti strig v odnosu do σ_s:

$$\tau_{max} = \tau_s = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \approx 0{,}58\,\sigma_s$$

medtem ko Lippmann iz primerjave gostote moči, porabljene za preoblikovanje, odreja odnos, da je:

$$\tau_{max} = \tau_s = \frac{k_e}{2} \quad \text{za ravninsko preoblikovalno trdnost,}$$

$$\tau_{max} = \tau_s = \frac{k_g}{2} \quad \text{za splošno preoblikovalno trdnost,}$$

pri čemer je $\sigma_s = k_f \leqslant k_e$. Odnos obeh vrednosti preoblikovalnih trdnosti za kovine je v območju:

$$k_e = (1{,}0 \ldots 1{,}2)\,k_f$$

Po pripravljenih osnovah obravnavajmo sedaj primer stiskanja kovine po sliki 1! Aproksimativna ravnotežna enačba je podana z (8):

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{2\tau}{h} = 0,$$

pogojna enačba plastičnosti za ravninski deformacijski proces, ker sta glavni smeri σ_1 in σ_2 istovetni s smerema σ_x in σ_y po sliki 1:

$$\sigma_x - \sigma_y = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s$$

ozir. $d\sigma_x = d\sigma_y$; tangencialna napetost na kontaktni površini v odvisnosti od normalne napetosti ali normalnega tlaka p_n je:

$$\tau = \pm f\,\sigma_y = \pm f\,p_n$$

S substitucijo v ravnotežno enačbo dobimo:

$$\frac{d\sigma_y}{dx} + \frac{2f\,\sigma_y}{h} = 0$$

z integracijo te:

$$\int \frac{d\sigma_y}{\sigma_y} = -\frac{2f}{h}\int_0^{a/2} dx$$

je splošna rešitev v obliki:

$$\sigma_y = -C\,.\exp\frac{2f}{h}(a/2 - x)$$

Posebno rešitev enačbe, s katero je podana funkcijska odvisnost poteka σ_y ozir. normalnega tlaka po koordinati x, dobimo z določitvijo integracijske konstante ob podanem robnem pogoju, ko je:

$$x = a/2, \quad \sigma_x = 0$$

iz česar izhaja:

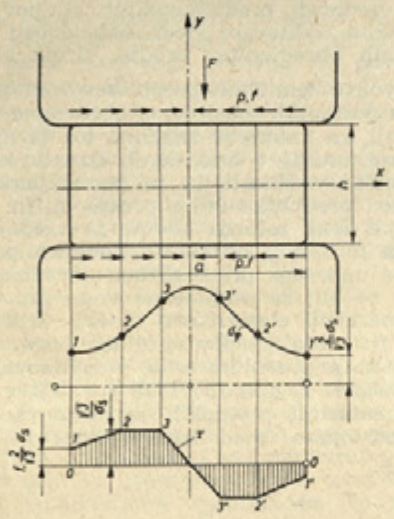
$$\sigma_y = C = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s$$

Tako je posebna rešitev in s tem funkcijska odvisnost razdelitve normalnega tlaka po območju, kjer velja $\tau = \pm f \sigma_y$, podana z:

$$\sigma_y = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \exp\frac{2f}{h}(a/2 - x)$$

Podobno določamo razdelitev normalnih napetosti po površini, na kateri zaradi večjih tornih sil dosežemo prijemna območja.

Shematični prikaz razdelitve normalnih napetosti po stiskani površini in tangencialnih napetosti je podan na sliki 7.



Sl. 7. *Shematični prikaz razdelitve σ in τ po kontaktni površini (po Unksovu)*

Pri stiskanju cilindričnega izkovka uporabljamo — izhajajoč iz aproksimativne ravnotežne enačbe (11)

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2\tau}{h} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0$$

po teoriji plastičnosti pogojni odnos med napetostmi in deformacijami, po katerem za opazovani primer velja, da je:

$$\sigma_r = \sigma_\varphi$$

S tem dobimo, da je $\sigma_r - \sigma_\varphi = 0$, njegovo substitucijo v enačbo (11) pa dobimo aproksimativno enačbo v obliki

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2\tau}{h} = 0$$

Ker je po aproksimativnem pogoju plastičnosti $d\sigma_r - d\sigma_z = 0$ in so tangencialne napetosti $\tau = \pm f \sigma_z$ dobimo s substitucijo:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2 f \sigma_z}{h} = 0$$

ozir. s preureditvijo in zatem z integracijo:

$$\frac{d\sigma_z}{\sigma_z} + \frac{2f}{h}dr = 0$$

splošno rešitev:

$$\sigma_z = -C \exp\frac{2f}{h}(d/2 - r)$$

Za robni pogoj, kjer je: $r = d/2$, $\sigma_r = 0$, velja: $\sigma_z = -C = -\sigma_s$.

Tako je posebna rešitev za drsno območje:

$$\sigma_z = -\sigma_s \exp\frac{2f}{h}(d/2 - r)$$

Po določanju še ostalih odvisnosti dobimo silo preoblikovanja:

$$F = \int_0^{d/2} \sigma_z 2\pi r \, dr$$

Povsem podoben je postopek za obravnavanje stiskanja kovine med naklonjenima ploščama. Prav tako uporabljamo izhodno aproksimativno ravnotežno enačbo (12). Substituiramo v (12) pogojno enačbo plastičnosti in funkcijsko odvisnost τ od σ_φ, s čimer dobimo po integraciji in postavljenih robnih pogojih razdelitev σ_φ po kontaktni površini in zatem preoblikovalno silo na enoto širine:

$$F = \int_{r_0}^{r_0 + a} \sigma_\varphi (\cos\alpha \pm f \sin\alpha) \frac{dr}{\cos\alpha}$$

pri čemer lahko drugi člen v oklepaju pri majhnem kotu in majhnih vrednostih f tudi zanemarimo.

Drugo skupino postopkov za analitično obravnavanje sestavljajo tehnični postopki valjanja, potiskanja in vlečenja. Geometrija procesa pri teh postopkih narekuje ustrezno izbiro koordinatnega sistema, razen tega pa ima tudi elementarni del preoblikovanca podobno obliko, če predpostavimo pri elementarnem delu valjanca, da sta nagnjeni gornji in spodnji rob ravna.

Če pri osnovni ravnotežni enačbi valjanja (16) glede na določeni koordinatni sistem uporabimo znani pogoj plastičnosti s tem, da je:

$$\sigma_1 = \sigma_x$$

$$\sigma_2 = \sigma_y = -p$$

dobimo:

$$\sigma_x = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s - p$$

S substitucijo tega izraza v (16) in ureditvijo enačbe dobimo osnovno diferencialno enačbo valjanja v obliki:

$$h\frac{dp}{dx} - 2\left(\frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}}\frac{x}{R} \pm p f\right) = 0$$

Splošna rešitev te enačbe po uvedbi novega parametra:

$$\operatorname{tg} w = \sqrt{\frac{R}{h_2}} \operatorname{tg} \alpha$$

in konstante:

$$A = 2f \sqrt{\frac{R}{h_2}}$$

je v obliki:

$$p = \sigma_s' \left[C \exp Aw - \frac{2}{A^2} (1 + Aw) \right]$$

pri čemer je:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s = \sigma_s'.$$

Z določitvijo robnih pogojev, ki sta, kadar valjamo brez vleka ali zavornega protivleka,

$\sigma_{x1} = 0,\ h = h_1$ za vstopni prerez

$\sigma_{x2} = 0,\ h = h_2$ za izstopni prerez

in integracijske konstante C dobimo funkcijsko odvisnost razdelitve normalnega tlaka p po prehitevalnem in zaostajalnem območju, zaradi prej omenjenih nasprotno usmerjenih tornih sil po kontaktnih površinah:

— za prehitevalno območje:

$$p = \sigma_s' \left[\left(1 + \frac{2}{A^2} \right) \exp Aw - \frac{2}{A^2} (1 + Aw) \right]$$

— za zaostajalno območje:

$$p = \sigma_s' \left\{ \left[1 + \frac{2}{A^2} (1 - Aw_1) \right] \exp A (w_1 - w) - \frac{2}{A^2} (1 - Aw) \right\}$$

Analogno pridemo do rešitve tudi pri postopku vlečenja in potiskanja s podobnimi aproksimacijami in podobnimi matematičnimi prijemi.

Ko ocenjujemo uvedene aproksimacije v analitično obravnavo tehničnih preoblikovalnih procesov, naj ugotovimo naslednje:

a) Tehnični preoblikovalni proces v začetku reduciramo na ravninski deformacijski proces s predpostavko, da je ena od deformacij v eni glavnih smeri nična. Ob koncu obravnave izraz za preoblikovalno silo na enoto širine pomnožimo s širino b, s čimer predpostavimo, da je vrednost preoblikovalne sile po vsej širini enaka. Odstopek je pri tem največji ob robovih, vendar ga v praktičnih računih dopuščamo.

b) Geometrija in druge posebnosti tehničnega preoblikovalnega postopka med znanimi koordinatnimi sistemi narekujejo izbiro in situiranje sistema tako, da dobimo po situiranju koordinatnega sistema z osmi sistema tudi smeri glavnih napetosti in glavnih deformacij.

c) Smer plastičnega toka kovine ob preoblikovalnem procesu ter oblika elementarnega dela preoblikovane kovine narekujejo ob pogoju ravnotežja in določenih silah, ki delujejo po ploskvah elementarnega dela, izbiro zanimive smeri in s tem osnovo za nastavitev ravnotežne enačbe. Glede na še razmeroma počasne toke preoblikovane kovine vpliv vztrajnostne sile pri nastavitvi ravnotežne enačbe zaradi neznatnosti lahko zanemarimo.

d) Z geometričnimi predpostavkami zaradi majhnih kotov ozir. predpostavkami neodvisnosti posameznih komponent od posameznih koordinat določenega koordinatnega sistema prevedemo strogo izpeljane ravnotežne enačbe v aproksimativne ravnotežne enačbe, bi pomenijo izhodne enačbe za obravnavo problema opazovanega preoblikovalnega procesa.

e) Ker določene ravnotežne enačbe zaradi večjega števila neznank navadno ne omogočajo nadaljnjega reševanja problema, uvajamo kot dodatne odnose pogojne enačbe plastičnosti, ki sestavljajo zaželene odnose med posameznimi glavnimi napetostmi in fizikalnimi lastnostmi preoblikovane kovine; kot pogojno enačbo plastičnosti za tehnične preoblikovalne procese kovin izbiramo Mises-Henckyjevo enačbo deformacijske energije.

f) V ravnotežno enačbo substituirana pogojna enačba plastičnosti z znanimi robnimi pogoji po robnih mejnih ploskvah preoblikovalnih prostorov omogoča z rešitvijo podajati splošno in posebno funkcijsko odvisnost iskane komponente napetosti od ene do določenih koordinat.

g) Z integracijo funkcijsko podane komponente vzdolž kontaktne ploskve med kovino in orodjem dobimo vrednost preoblikovalne sile na enoto širine (na enoto tiste smeri, o kateri smo predpostavili, da je deformacija v tej smeri nična).

h) Po teh teoretičnih aproksimativnih postopkih dobljene vrednosti preoblikovalnih sil povsem ustrezajo osnovnim zahtevam glede natančnosti pri obravnavi iskanih obremenitev orodja, stroja ali naprave.

Obravnave tehničnih preoblikovalnih procesov po nakazanih postopkih imenujemo obravnave po elementarni teoriji, za katero je značilno to, da uporabljamo povrh aproksimacij v analitičnih izrazih še dve izrazito empirični vrednosti, ki ju postavljamo kot konstantni med preoblikovalnim procesom, in sicer σ_s — napetost pri meji tečenja kovine in vrednost tornega koeficienta f. V bolj eksaktnih novejših postopkih je bil dosežen napredek pri analitični obravnavi procesov s tem, da so bili za posamezne vrste preoblikovalnih procesov odrejeni elementarni modeli (tračni, ploščni, cevni) ter fizikalna veličina σ_s ni več konstanta, temveč funkcija stopnje preoblikovanja, preoblikovalne hitrosti in temperature. Z uporabo take funkcijske odvisnosti σ_s v elementarnih postopkih je možno še zmanjšati velikost odstopkov med izračunanimi in merjenimi vrednostmi.

LITERATURA

[1] Hoffman, Sachs: Introduction to the theory of plasticity for engineers. McGraw-Hill book co. 1953.

[2] Unksov: An engineering theory of plasticity. Butter worths. London 1961.

[3] Lippmann, Mahrenholtz: Plastomechanik der Umformung metallischer Werkstoffe. Springer Verlag, Berlin 1967.

[4] O. Kienzle, Dohmen: Mechanische Umformtechnik. Springer Verlag, 1968.

[5] Storošev, Popow: Grundlagen der Umformtechnik. VEB Berlin 1968.

[6] Čižman: Problemi teorije valjanja. Magistrsko delo, febr. 1970.

Avtorjev naslov:

mag. ing. Vincenc Čižman,
Fakulteta za naravoslovje in tehnologijo Univerze v Ljubljani