YU — ISSN — 0039 — 2480

STROJNIŠKI VESTNIK

LETNIK 24 LJUBLJANA, NOVEMBER—DECEMBER 1978 ŠTEVILKA 11—12

UDK 536.2:681.3.06

Robni pogoji druge in tretje vrste v programu TEMPEL

ANDRO ALUJEVIČ — POLDE ŠKERGET

1. UVOD

Za določanje temperaturnih porazdelitev v trdnih telesih imamo na voljo analitične, eksperimentalne in numerične metode. K slednjim štejemo metodo končnih razlik in novejšo metodo končnih elementov. O tej (MKE) smo že poročali v Strojniškem vestniku, ko smo opisali naš računalniški program TEMPEL [1], ki je imel vgrajene robne pogoje prve vrste, pri katerih je znana funkcijska vrednost (temperatura) v izbranih točkah. Poleg takih, tj. Dirichletovih robnih pogojev, je bilo doslej mogoče v programu TEMPEL upoštevati edinole še adiabatne (izolacijske) pogoje, npr. zaradi simetrije ali iztegnjenosti teles. Iz teorije prenosa toplote pa vemo, da se pojavljajo pri problemih prevajanja toplote tudi še Neumannovi (druge vrste), konvekcijski (tretje vrste) in Stefanovi sevalni (četrte stopnje) robni pogoji na meji s fluidi. Zato smo se lotili posplošitve obstoječega ravninskega programa, ki smo mu dogradili zahtevane robne pogoje druge in tretje vrste. Sevanja s površin za zdaj nismo upoštevali, saj bi morali reševati sisteme nelinearnih enačb z iteracijo.

Pri obravnavi temperaturnih porazdelitev in toplotnih tokov v trdnih telesih (omejili se bomo na ravninske prereze) po metodi končnih elementov moramo razrešiti problem minimuma funkcionala, ki vsebuje

$$I = \frac{1}{2}\iint_A \left\{ \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2\right] - 2\,P\,T \right\} . \mathrm{d}A + \frac{1}{2}\int_{S_h} \alpha\,(T^2 - 2\,T_z\,T)\,\mathrm{d}S_h - \int_{S_q} q\,T\,\mathrm{d}S_q$$

kjer pomenijo: λ — toplotno prevodnost, P — gostoto toplotnh virov v enoti prostornine, α — toplotno prestopnost in q — predpisan toplotni tok.

Temperaturo T v prerezu A iščemo, medtem ko je zunanja temperatura T_z v fluidu znana. Konvencijski robni pogoj (tretje vrste) je predpisan na robu S_h, medtem ko je na robu S_q podan toplotni tok, tj. Neumannov robni pogoj (druge vrste).

Za reševanje zapisane enačbe, tj.

$$I = I_k - I_p + I_h - I_q$$

mora biti izpolnjena zahteva

$$\mathrm{d}I/\mathrm{d}\boldsymbol{t} = o$$

kjer je

$$\boldsymbol{t} = \{T_1, \ldots, T_n\}$$

stolpec (»vektor«) vseh vozliščnih temperatur v mreži elementov prereza (uporabljamo triangulacijo z linearnimi končnimi elementi). Kondukcijski, generacijski, konvekcijski in tokovni delež funkcionala lahko rešujemo vsakega posebej v posameznih končnih elementih, nato pa rešitve seštejemo v obeh smislih.

2. KONDUKCIJA IN GENERACIJA TOPLOTE

Ta dva deleža zapišemo v obliki [2]

$$\mathrm{d}I_k/\mathrm{d}\boldsymbol{t} = \sum_{e=1}^{E} \mathrm{d}I^e{}_k/\mathrm{d}\boldsymbol{t}$$

in

$$\mathrm{d}I_p/\mathrm{d}\boldsymbol{t} = \sum_{e=1}^{E} \mathrm{d}I^e{}_p/\mathrm{d}\boldsymbol{t}$$

Ker je v teh izrazih za posamične elemente v sestavu prereza veliko ničel (samo mesta z označbami i, j, k so zasedena), je primerno, če uvedemo matriko razporeda vozlišč določenega elementa v sestavu mreže, tj.

$$\boldsymbol{D}^e = \begin{bmatrix} 0, 0, 0 \\ \cdots\cdots \\ 1, 0, 0 \\ 0, 1, 0 \\ 0, 0, 1 \\ \cdots\cdots \\ 0, 0, 0 \end{bmatrix}$$

ki jo je zaradi binarnosti mogoče v računalniškem spominu shraniti izredno strnjeno.

Tako dobimo

$$\mathrm{d}I^e/\mathrm{d}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{D}^e\,\mathrm{d}I^e/\mathrm{d}\boldsymbol{t}^e$$

kjer pa so stolpci samo še trikomponentni, tj.

$$dI^e/dt^e = \{\partial I^e/\partial t_i,\ \partial I^e/\partial t_j,\ \partial I^e/\partial t_k\}$$

oziroma

$$t^e = \{t_i,\ t_j,\ t_k\}$$

Temperaturno porazdelitev v trikotnih elementih predpostavimo linearno

$$t^e = a + b\,x + c\,y = z^* c^e$$

kjer sta $z^* = [1, x, y]$ *in* $c^e = \{a, b, c\}$ vrstica ozir. stolpec. Konstante določimo iz vrednosti temperatur v vozliščih trikotnika (ogljišča)

$$t^e = Z^e\, c^e$$

kjer je matrika

$$Z^e = \begin{bmatrix} 1, x_i, y_i \\ 1, x_j, y_j \\ 1, x_k, y_k \end{bmatrix}$$

in so iskane konstante

$$c^e = (Z^e)^{-1}\, t^e = R^e\, t^e$$

Zaradi

$$dI_k{}^e/dt^e = \lambda^e R^{e*} \left(\iint_{A_e} (z_x z_x{}^* + z_y z_y{}^*)\, dx\, dy \right) R^e\, t^e = K^e\, t^e$$

dobimo kondukcijsko matriko po opravljenih operacijah, ki so bile nakazane

$$K^e = \frac{\lambda^e A_e}{(x_{ij}\, y_{jk} - x_{jk}\, y_{ij})^2} \cdot \begin{bmatrix} x_{jk}{}^2 + y_{jk}{}^2, & -(x_{ik}\, x_{jk} + y_{ik}\, y_{jk}), & x_{ij}\, x_{jk} + y_{ij}\, y_{jk} \\ \ldots & , x_{ik}{}^2 + y_{ik}{}^2 & , -(x_{ij}\, x_{ik} + y_{ij}\, y_{ik}) \\ \text{simetrično,} & \ldots & , x_{ij}{}^2 + y_{ij}{}^2 \end{bmatrix}$$

kjer so razdalje

$$x_{ij} = x_j - x_i, \quad x_{jk} = x_k - x_j, \quad x_{ik} = x_k - x_i$$
$$y_{ij} = y_j - y_i, \quad y_{jk} = y_k - y_j, \quad y_{ik} = y_k - y_i$$

in površina trikotnika

$$A_e = \tfrac{1}{2}\,(x_{ij}\, y_{jk} - x_{jk}\, y_{ik})$$

Za celoten sestav elementov velja potem

$$dI_k/dt = \sum_{e=1}^{E} D^e\, K^e\, t^e = \left(\sum_{e=1}^{E} D^e\, K^e\, D^{e*} \right) t = K\, t$$

Podobno dobimo generacijski delež, ki znaša v posameznih elementih

$$dI_p{}^e/dt^e = P_e\, R^{e*} \iint_{A_e} z\, dx\, dy = \tfrac{1}{3}\, P_e\, A_e\, \{1, 1, 1\} = p^e$$

in za celoten sestav

$$dI_p/dt = \sum_{e=1}^{E} D^e\, p^e = p$$

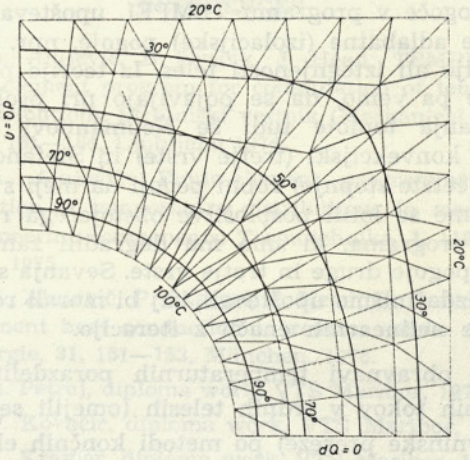
Če upoštevamo tako kondukcijski kakor tudi generacijski člen, se matrična enačba sistema končnih elementov torej glasi

$$K\, t - p = 0$$

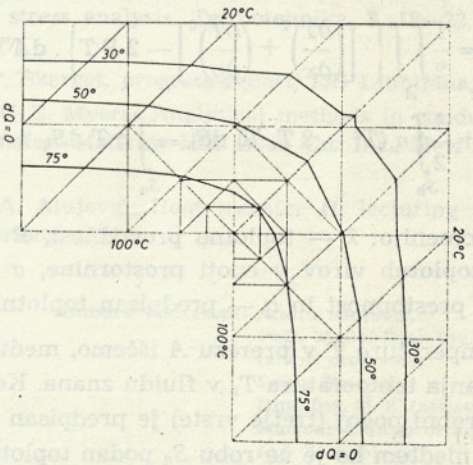
3. TEMPERATURNI IN ADIABATNI ROBNI POGOJI

V določenih točkah prereza utegnemo poznati funkcijsko vrednost (temperaturo). Zato moramo matriko K ustrezno prilagoditi z izbrisom ustrezne vrstice in stolpca, lahko pa tudi diagonalni člen magnificiramo z zelo velikim številom (npr. 10^{20}), da postanejo drugi vplivi nepomembni.

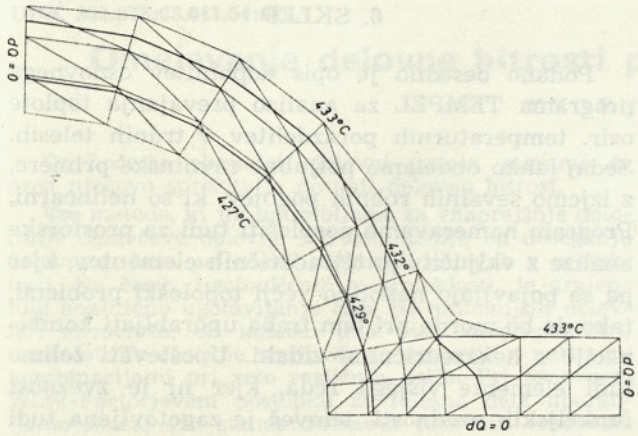
Posebej preprosto upoštevamo tudi adiabatne robne pogoje (izolacija pomeni »neobremenjen« rob), kjer matrike ni treba spreminjati. S tako definiranim programom TEMPEL smo v okviru dodiplomskega študija na VTŠ Maribor izvedli nekaj tipičnih izračunov prek terminala na računalniku CYBER 72 v Ljubljani. Dobili smo zadovoljive rezultate [3, 4]. V slikah 1 do 4 je izbranih nekaj zgledov, ki so jih ovrednotili študenti IV. letnika strojništva mariborske univerze (izoterme v prerezih). Pripomniti velja, da deluje program tudi interaktivno [7]. Uporabnik mora dodati mrežo, vozlišča in robne temperature, bodisi z branjem podatkov ali pa z izdelavo ustreznih geometrijskih podprogramov.



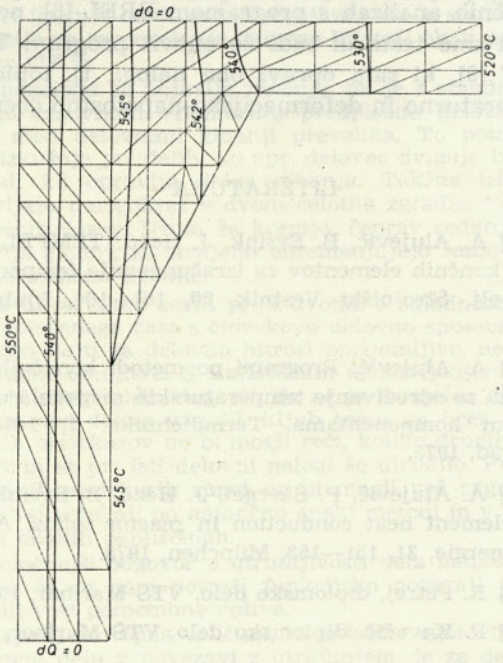
Sl. 1. *Prerez z odprtino (r. p. I. vrste)*



Sl. 2. *Prerez z odprtino (r. p. I. vrste)*



Sl. 3. *Cev s plavutjo (r. p. I. vrste)*



Sl. 4. *Cev s prirobnico (r. p. I. vrste)*

4. ROBNI POGOJI DRUGE VRSTE

Kadar je na posameznem robu znan toplotni tok (Neumannov pogoj), imamo opravka z ustreznim deležem funkcionala v obliki

$$dI_q/d\boldsymbol{t} = \sum_{e=1}^{E} dI_q{}^e/d\boldsymbol{t}$$

ozir.

$$dI_q{}^e/d\boldsymbol{t} = \boldsymbol{D}_s{}^e \, dI_q{}^e/d\boldsymbol{t}_s{}^e$$

kjer velja sumacija samo za tiste robove, kjer je dan tokovni predpis. Zato je ustrezna razporedna matrika (upoštevamo največ dve robni točki)

$$\boldsymbol{D}_s{}^e = \begin{bmatrix} 0, 0 \\ \cdots \\ 1, 0 \\ 0, 1 \\ \cdots \\ 0, 0 \end{bmatrix}$$

Najprimerneje je uvesti lokalni koordinatni sistem, tako da je

$$\boldsymbol{t}_s{}^e = \{t_i, t_j\}$$

ozir.

$$t_s{}^e = [1, s] \, \boldsymbol{c}^e = \boldsymbol{s}^* \boldsymbol{S}^e \, \boldsymbol{t}_s{}^e$$

kjer je matrika

$$\boldsymbol{S}^e = \frac{1}{s_{ij}} \begin{bmatrix} s_j, & -s_i \\ -1, & +1 \end{bmatrix}$$

in pomeni s_{ij} dolžino roba elementa.

Na ta način dobimo z integracijo

$$dI_q{}^e/d\boldsymbol{t}_s{}^e = q_e \boldsymbol{S}^{e*} \int_{s_1}^{s_j} \boldsymbol{s} \, ds = \tfrac{1}{2} q_e \, s_{ij} \, \{1, 1\} = \boldsymbol{q}^e$$

tako da je za sestav elementov

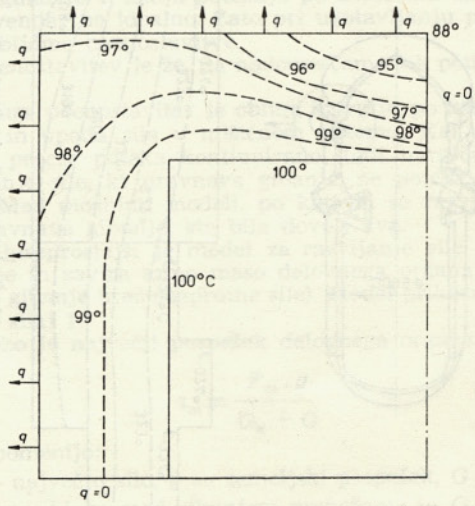
$$dI_q/d\boldsymbol{t} = \sum_{e=1}^{E} \boldsymbol{D}_s{}^e \, \boldsymbol{q}^e = \boldsymbol{q}$$

kar takoj lahko upoštevamo v matrični enačbi sistema elementov, ki postane

$$\boldsymbol{K} \, \boldsymbol{t} - \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q} = 0$$

Pripomniti velja, da morajo biti poleg tokovnih robnih pogojev vsaj v nekaterih točkah dani tudi temperaturni robni pogoji, da bo rešitev enolična (»privezana«).

Z navedeno dopolnitvijo programa TEMPEL smo izračunali [5] primer, ki je prikazan na sliki 5.



Sl. 5. *Valj s pokrovom (r. p. II. vrste)*

5. ROBNI POGOJI TRETJE VRSTE

Podobno kakor v prejšnji točki zastavimo upoštevanje konvekcijskih robnih pogojev. Uporabimo enako razporedno matriko $\boldsymbol{D}_s{}^e$, kjer pač imamo predpis.

Ustrezni funkcional dobimo z integracijo izraza v elementih prereza

$$I_h{}^e = \tfrac{1}{2}\,\alpha_e \int_{s_1}^{s_j} [(\boldsymbol{s}^* \boldsymbol{S}^e \boldsymbol{t}_s{}^e)^2 - 2\,T_z{}^e\,(\boldsymbol{s}^* \boldsymbol{S}^e \boldsymbol{t}_s{}^e)]\,\mathrm{d}s$$

in je

$$\mathrm{d}I_h{}^e/\mathrm{d}\boldsymbol{t}_s{}^e = \boldsymbol{H}^e\,\boldsymbol{t}_s{}^e - \boldsymbol{h}^e$$

kjer sta

$$\boldsymbol{H}^e = \frac{1}{6}\,\alpha_e s_{ij} \begin{bmatrix} 2, 1 \\ 1, 2 \end{bmatrix}$$

ozir.

$$\boldsymbol{h}^e = \alpha_e s_{ij} T_z{}^e\,\{1, 1\}$$

Seštevanje opravimo v obliki

$$\boldsymbol{H} = \sum_{e=1}^{E} \boldsymbol{D}_s{}^e\,\boldsymbol{H}^e\,\boldsymbol{D}_s{}^{e*}$$

in

$$\boldsymbol{h} = \sum_{e=1}^{E} \boldsymbol{D}_s{}^e\,\boldsymbol{h}^e$$

tako da dobimo matrično enačbo sistema elementov, ki se dopolnjena glasi

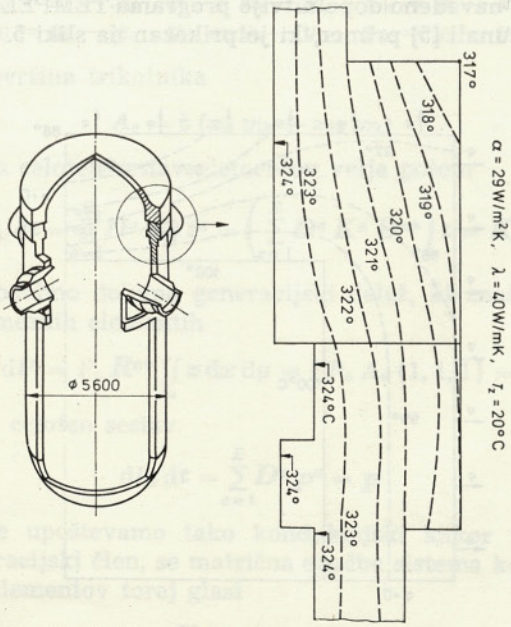
$$(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{H})\,\boldsymbol{t} - \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q} - \boldsymbol{h} = 0$$

ali krajše

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{t} = \boldsymbol{b}$$

kjer stolpec neznanih temperatur poiščemo s postopki numeričnih metod, saj pri velikih problemih neposredno obračanje $\boldsymbol{A}^{-1}$ ni ekonomično.

Z opisanim postopkom smo ovrednotili [6] zgled, prikazan na sliki 6.



Sl. 6. *Sod z dnom in pokrovom (r. p. III. vrste)*

6. SKLEP

Podano besedilo je opis dopolnitev osnovnega programa TEMPEL za analizo prevajanja toplote ozir. temperaturnih porazdelitev v trdnih telesih. Sedaj lahko obdelamo poljubne ravninske primere, z izjemo sevalnih robnih pogojev, ki so nelinearni. Program nameravamo posplošiti tudi za prostorske analize z vključitvijo tetraedričnih elementov, kjer pa se pojavljajo nekoliko večji topološki problemi, tako da bo morda pri tem treba uporabljati kombinacijo s heksaedričnimi zidaki. Upoštevati želimo tudi elemente višjega reda, kjer ni le zveznost funkcijskih vrednosti, temveč je zagotovljena tudi zveznost prvih odvodov.

Doslej smo program TEMPEL uporabljali predvsem kot sredstvo za pripravo podatkov pri termoelastičnih analizah s programom BREL [8], nedavno pa smo testirali tudi že enovit program TEMPEST [9], ki sam opravi obe nalogi, tj. toplotno-temperaturno in deformacijsko-napetostno oceno.

LITERATURA

[1] A. Alujevič, B. Eysink, J. Head: TEMPEL program končnih elementov za izračunavanje temperaturnih polj. Strojniški Vestnik, **20**, 161—164, Ljubljana 1974.

[2] A. Alujevič: Programi po metodi konačnih elemenata za određivanje temperaturskih raspodela u mašinskim komponentama. Termotehnika, **1**, 146—164, Beograd, 1975.

[3] A. Alujevič, P. Škerget, J. Head, B. Eysink: Finite element heat conduction in reactor solids. Atomkernenergie, **31**, 151—153, München, 1978.

[4] R. Petrej, diplomsko delo, VTŠ Maribor, 1977.

[5] P. Kovačič, diplomsko delo, VTŠ Maribor, 1978.

[6] F. Kramar, diplomsko delo, VTŠ Maribor, 1978.

[7] L. Jurak, diplomsko delo, VTŠ Maribor, 1978.

[8] A. Alujevič: Program konačnih elemenata BREL za analizu termičnih napona. Termotehnika, **3**, 18—22, Beograd, 1977.

[9] P. Škerget, delovno poročilo, IJS Ljubljana, 1978.

[10] G. E. Myers: Analytical methods in conduction heat transfer. McGraw-Hill Book Co. Inc., New York, 1971.

[11] A. Alujevič: Prenos toplote II, skripta, Visoka tehniška šola Univerze v Mariboru, 1975.

Avtorjev naslov: Izr. prof. dr. mag. Andro Alujevič, dipl. ing.
Asist. Polde Škerget, dipl. ing. str.
VTO strojništvo VTŠ Maribor
62000 Maribor, Smetanova 17