

UDK 539.384.2

# Upogib nosilcev s konstantnim prerezom v elasto-plastičnem območju

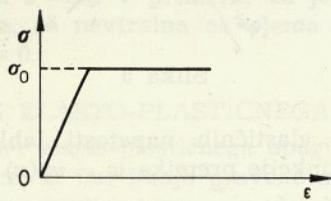
FRANC KOSEL — IVAN BORŠNIK

V članku je obravnavan primer elasto-plastičnega upogiba nosilcev še posebej glede na določanje deformacijskega stanja po razbremenitvi. Obravnavani so primeri, ko so nosilci obremenjeni s konstantnim upogibnim momentom in imajo konstanten pravokotni, kvadratni, okrogli, enakokraki trapezni in enakokraki trikotni prerez. Za prve tri primere je bil izveden tudi preizkus in primerjan z analitično določenimi rezultati.

## 1. UVOD

V praksi nas pogosto zanima deformacijsko stanje nosilca po razbremenitvi. Takšne plastične deformacije se pojavljajo v elementu tedaj, ko so zunanjje obremenitve dovolj velike, da je napetostno stanje v elasto-plastičnem območju. Pri navijanju vijačnih vzmeti nas zanima potreben navjalni premer, da dobi vzmet po razbremenitvi zaželeno obliko. Podobnih primerov je v praksi še dovolj.

Vzemimo material, ki naj ima funkcijo  $\sigma = \sigma(\epsilon)$  po sl. 1. Upogibni moment  $M_{pl}$  naj bo tolikšen, da se nosilec v prerezu delno plastično deformira.



Slika 1

Po razbremenitvi se vzpostavi ravnotežno stanje med elasto-plastičnim in elastičnim upogibom.

Po razbremenitvi lahko določimo napetostno stanje  $\sigma_R(z)$  (sl. 2) iz naslednjih predpostavk [1]:

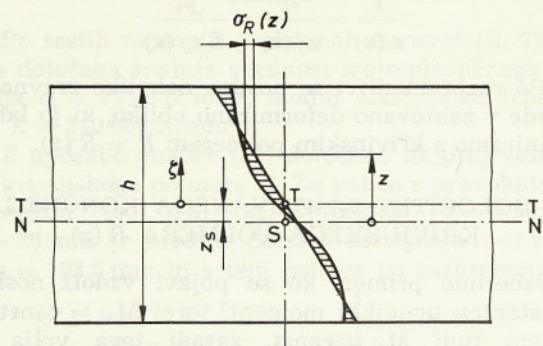
a) Menimo, da se po razbremenitvi zaradi notranjega upogibnega momenta pojavijo samo elastične napetosti.

b) Tangencialne napetosti med vlakni pri upogibu zanemarimo.

c) Vektor upogibnega momenta mora delovati v eni od vztrajnostnih osi prereza.

d) Velja naj Bernoulli-Navierjeva hipoteza o ravnih prerezih.

e) Os nosilca naj bo pred deformacijo ravna.



Slika 2

Pri elasto-plastičnem upogibu leži nevtralna os napetostnega stanja  $\sigma_{pl} = \sigma_{el}(z)$  za  $z = z_s$  oddaljena od težiščnice prereza, ki pomeni nevtralno os popolnoma elastičnih upogibnih napetosti po razbremenitvi

$$\sigma_{el} = \sigma_{el}(\zeta)$$

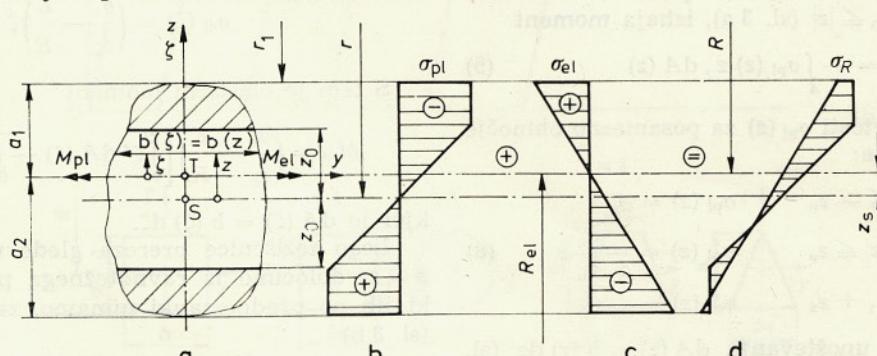
oziroma zaradi  $\zeta = z - z_s$  je tudi

$$\sigma_{el} = \frac{M_{el}}{I_y}(z - z_s) \quad (1)$$

kjer sta  $z_s$  — lega težiščnice glede na nevtralno os prereza in  $I_y$  — ekstremni aksialni vztrajnostni moment glede na os, v kateri deluje vektor momenta.

Funkcija preostalih napetosti je s tem

$$\sigma_R(z) = \sigma_{pl}(z) - \sigma_{el}(z - z_s) = \sigma_{pl}(z) - \frac{M_{el}}{I_y}(z - z_s) \quad (2)$$



Slika 3

in mora zadoščati zahtevi o momentnem ravnotežju

$$M_R = \int_A \sigma_R(z) z dA(z) = 0 \quad (3)$$

iz katerega lahko določimo deformacijsko stanje.

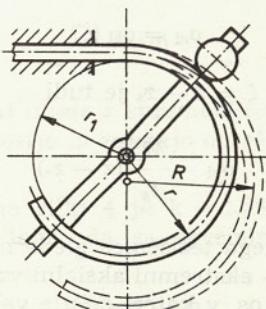
Ob upoštevanju poprejšnjih predpostavk lahko na meji med elastičnim in plastičnim območjem  $z = z_0$  (sl. 3) določimo krivinski radij deformiranega nosilca v elasto-plastičnem napetostnem stanju.

$$\frac{1}{r(x)} = \frac{\varepsilon_0}{z_0(x)} = \frac{\sigma_0}{E z_0(x)} \quad (4)$$

Po razbremenitvi se nosilec nekoliko zravnva in preide v zahtevano deformirano obliko, ki jo lahko definiramo s krivinskim polmerom  $R = R(x)$ .

## 2. DOLOČITEV ZAHTEVANEGA KONČNEGA KRIVINSKEGA POLMERA $R(x)$

Izberimo primer, ko se pojavi vzdolž nosilca konstanten upogibni moment, torej  $M_{pl} = \text{const}$  in s tem tudi  $M_{el} = \text{const}$ , zaradi tega velja še  $z_0 = \text{const}$  in iz enačbe (4)  $r = \text{const}$ . Temu primeru ustreza v praksi krivljenje palice s konstantnim prerezom na valju s polmerom  $r = \text{const}$  (sl. 4). Če predpostavimo, da je tudi material elementa homogen in izotropen ( $E = \text{const}$ ), bo krivinski polmer  $R$  deformiranega nosilca po razbremenitvi tudi konstanten  $R = \text{const}$ .



Slika 4

Iz momentnega ravnotežnega pogoja glede na glavno vztrajnostno os prereza ( $y$ ), v kateri deluje moment  $M_{pl}$ , ki povzroča delno plastično deformacijo v območju  $z_0 \leq |z|$  (sl. 3 a), izhaja moment

$$M_{pl} = - \int_A \sigma_{pl}(z) z \cdot dA(z) \quad (5)$$

Funkcija napetosti  $\sigma_{pl}(z)$  za posamezno območje prereza (sl. 3 b) je:

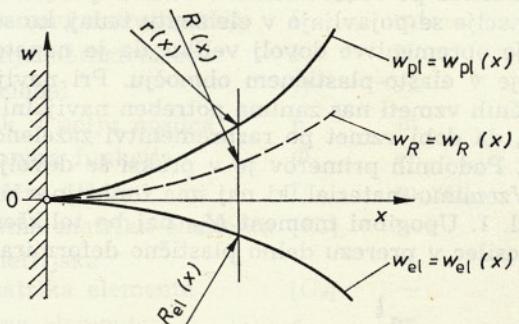
$$\begin{aligned} -(a_2 - z_s) &\leq z \leq -z_0 & \sigma_{pl}(z) &= \sigma_0 \\ |z| &\leq z_0 & \sigma_{pl}(z) &= -\frac{\sigma_0}{z_0} z \\ z_0 &\leq z \leq a_1 + z_s & \sigma_{pl}(z) &= -\sigma_0 \end{aligned} \quad (6)$$

S tem je ob upoštevanju  $dA(z) = b(z) dz$  (sl. 3 a) potreben upogibni moment

$$\begin{aligned} M_{pl} = -\sigma_0 \left\{ \frac{1}{z_0} \left[ \int_0^{z_0} z^2 dA(z) - \int_0^{-z_0} z^2 dA(z) \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{-z_0}^{z_s-a_2} z dA(z) + \int_{-z_0}^{a_1+z_s} z dA(z) \right\} \right\} \quad (7) \end{aligned}$$

V trenutku, ko zunanjega obremenitev ne deluje več, ostane samo nasprotno usmerjeni notranji moment, ki ga imamo za popolnoma elastičnega in se nevtralna os v tem primeru ujema s težiščnico. S slik 3 a in 3 c je ta elastični moment

$$M_{el} = \int_A \sigma_{el}(\zeta) \zeta dA(\zeta) \quad (8)$$



Slika 5

Funkcijo elastičnih napetosti lahko določimo z uporabo funkcije premika  $w = w(x)$  (sl. 5)

$$w_R(x) = w_{pl}(x) + w_{el}(x) \quad (9)$$

ozziroma

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{1}{R_{el}} \quad (10)$$

ker velja

$$\frac{1}{R_{el}} = -\frac{\varepsilon_{el}}{\zeta} = -\frac{\sigma_{el}(\zeta)}{E \zeta} \quad (11)$$

in z upoštevanjem enačbe (4) lahko zapišemo zahtevani končni polmer

$$\frac{1}{R} = \frac{\sigma_0}{E z_0} - \frac{\sigma_{el}(\zeta)}{\zeta E} \quad (12)$$

in elastično napetost

$$\sigma_{el}(\zeta) = \left( \frac{\sigma_0}{z_0} - \frac{E}{R} \right) \zeta$$

S tem je elastični moment

$$M_{el} = \left( \frac{\sigma_0}{z_0} - \frac{E}{R} \right) \left[ \int_0^{a_1} \zeta^2 dA(\zeta) - \int_0^{-a_2} \zeta^2 dA(\zeta) \right] \quad (13)$$

kjer je  $dA(\zeta) = b(\zeta) d\zeta$ .

Lego težiščnice prereza glede na nevtralno os  $z = z_s$  določimo iz ravnotežnega pogoja osnih sil, ki jih po predpostavki nimamo, zato mora veljati (sl. 3 b)

$$N = \int_A \sigma_{pl}(z) dA(z) = 0 \quad (14)$$

ozioroma ob upoštevanju funkcije  $\sigma_{pl} = \sigma_{pl}(z)$ , (6)

$$z_0 \left[ \frac{\int_{-z_0}^{z_s} dA(z) - \frac{a_1 + z_s}{z_0} \int_{-z_0}^{z_s} dA(z)}{z_s - a_2} \right] + \\ + \int_0^{-z_0} z dA(z) - \int_0^{z_0} z dA(z) = 0 \quad (15)$$

Velikost končnega radija ukrivljenosti določimo na osnovi momentnega ravnotežja

$$M_{el} + M_{pl} = 0 \quad (16)$$

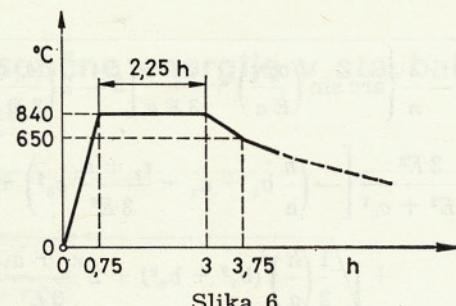
in odtod z zamenjavo funkcij (7) in (13)

$$\left( \frac{1}{z_0} - \frac{E}{R \sigma_0} \right) \left[ \int_0^{a_1} \zeta^2 dA(\zeta) - \int_0^{-a_2} \zeta^2 dA(\zeta) \right] + \\ + \frac{1}{z_0} \left[ \int_0^{-z_0} z^2 dA(z) - \int_0^{z_0} z^2 dA(z) \right] - \\ - \int_{-z_0}^{z_s - a_2} z dA(z) - \int_{-z_0}^{a_1 + z_s} z dA(z) = 0 \quad (17)$$

Iz zgornje enačbe izhaja, da je treba najprej določiti mejo plastičnega tečenja  $\sigma_0$ , globino plastične deformacije  $z = z_0$  po enačbi (4) in lego nevtralne osi  $z = z_s$ . V primeru, ko je os  $y$  sime-trala prereza, se nevtralna os ujemata s težiščnico prereza,  $z_s = 0$ .

### 3. PRIMERI ELASTO-PLASTIČNEGA UPOGIBA

Kot primer elasto-plastičnega upogiba izberimo jeklene palice, ki naj imajo pravokotni, kvadratni in okrogli konstantni prerez, in določimo polmer  $R = \text{const}$ , ki se pojavi po procesu krivljenja na notranji polmer  $r_1 = 100 \text{ mm}$  (sl. 4). Za palice izberemo jeklo Č.1221, ki ga izdeluje železarna Jesenice. Preizkušanci in epruvete so bili izdelani iz iste gredice, ki vsebuje kemične elemente, določene s šaržno kemično analizo, in sicer: 0,12 % C; 0,11 % Si; 0,47 % Mn; 0,015 % P in 0,013 % S. Po obdelavi so bili preizkušanci in epruvete še dodatno normalizirani v tunelski peči pri temperaturi 840 °C (sl. 6), kar ustreza maloogljičnim jeklom z 0,12 % C.



Slika 6

Po šestih nateznih preizkusih epruvet (sl. 7), je bila določena srednja vrednost meje plastičnega tečenja  $\sigma_0 = 225,6 \text{ N/mm}^2$ , modul elastičnosti izberemo  $E = 210\,000 \text{ N/mm}^2$ .

Z uporabo enačbe (17) določimo najprej velikosti krivinskega polmera  $R$ . Za palico s pravokotnim prerezom (sl. 8 a) in velikostjo  $a = 3,5 \text{ mm}$ ,  $b = 20 \text{ mm}$  je srednji polmer krivljenja  $r = r_1 + a = 103,5 \text{ mm}$  in s tem polmer po razbremenitvi

$$R = \frac{r}{1 - \frac{\sigma_0 r}{2 E a} \left[ 3 - \left( \frac{\sigma_0 r}{E a} \right)^2 \right]} = 108,67 \text{ mm}$$

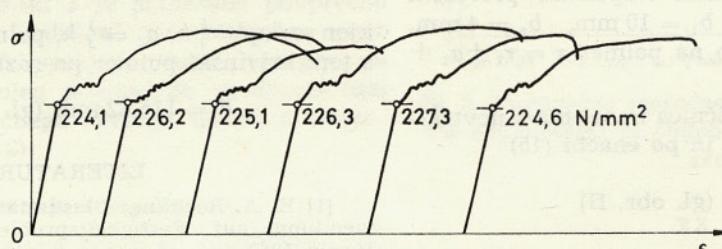
Palica s kvadratnim prerezom (sl. 8 b) in velikostjo  $a = 5,5 \text{ mm}$  se pri polmeru krivljenja  $r = r_1 + a = 105,5 \text{ mm}$  sprosti na polmer  $R = 108,86 \text{ mm}$ .

Palica z okroglim prerezom (sl. 8 c) in velikostjo  $a = 5,5 \text{ mm}$  dobi po krivljenju na polmer  $r = r_1 + a = 105,5 \text{ mm}$  krivinski polmer

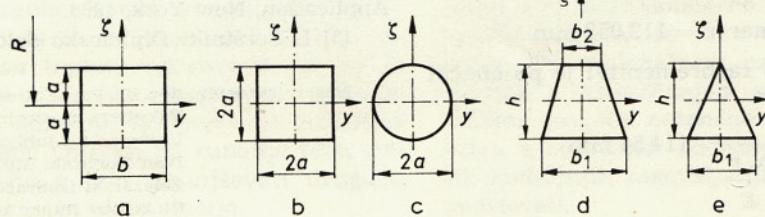
$$R = 109,32 \text{ mm} \quad (\text{gl. obr. I})$$

Krivinski polmeri  $R$  za zgornje tri primere so bili določeni tudi s preizkusi z napravo za krivljenje, ki ustreza primeru krivljenja po sl. 4. Za vsak primer je bilo opravljenih po šestnajst preizkusov in določena srednja aritmetična vrednost polmera:

$$R_e = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{i=16} R_e$$



Slika 7



Slika 8

$$R = \frac{r}{1 - \frac{2}{\pi} \left\{ \arcsin \left( \frac{\sigma_0 r}{E a} \right) + \frac{\sigma_0 r}{3 E a} \left[ 5 - 2 \left( \frac{\sigma_0 r}{3 E a} \right)^2 \right] \sqrt{1 - \left( \frac{\sigma_0 r}{E a} \right)^2} \right\}} = 109,32 \text{ mm} \quad (\text{I})$$

$$z_s = \frac{3 E^2}{3 E^2 + \sigma_0^2} \left[ - \left( \frac{h}{a} b_2 + a_1 + \frac{r_1 + a_1}{3 E^2} \sigma_0^2 \right) + \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{h}{a} \right)^2 (b_1^2 + b_2^2) + 2 \frac{r_1 + a_1}{3 E^2} \sigma_0^2 \left( \frac{h}{a} b_2 + a_1 \right) + \left( \frac{r_1 + a_1}{\sqrt{3} E} \sigma_0 \right)^2 \left( \frac{\sigma_0^2}{3 E^2} - 1 \right)} \right] = 0,624 \text{ mm} \quad (\text{II})$$

$$z_s = \frac{3 E^2}{3 E^2 + \sigma_0^2} \left[ - \left( a_1 + \frac{r_1 + a_1}{3 E^2} \sigma_0^2 \right) + \sqrt{\frac{h^2}{2} + 2 \frac{r_1 + a_1}{3 E^2} \sigma_0^2 \cdot a_1 + \left( \frac{r_1 + a_1}{\sqrt{3} E} \sigma_0 \right)^2 \left( \frac{\sigma_0^2}{3 E^2} - 1 \right)} \right] = 0,81 \text{ mm} \quad (\text{III})$$

$$R = \frac{r}{1 - \frac{\sigma_0 r}{E} \frac{(z_s - a_2)^2 (3 a_1 + 2 a_2 + z_s) + (a_1 + z_s) \left[ (a_1 + z_s)^2 - 2 \left( \frac{\sigma_0 r}{E} \right)^2 \right]}{2 (a_1 + z_s) (a_1^3 + a_2^3) - 1,5 (a_1^4 + a_2^4)}} = 116,82 \text{ mm} \quad (\text{IV})$$

Iz naslednje tabele so razvidne srednje vrednosti s preizkusi določenih krivinskih polmerov  $R_e$  in odstopanja od izračunanih vrednosti  $R$

Prerez	$R$	$R_e$	Napaka %
pravokotni	108,67	107,67	-1
kvadratni	108,86	107,81	-1
okrogli	109,32	109,1	-0,2

Glede na velikost napake lahko ugotovimo, da je ujemanje izračunanih in preizkušenih rezultatov zelo dobro. Natančnost izračuna je v veliki meri odvisna od meje plastičnega tečenja  $\sigma_0$ , ki jo določimo za posamezno gradivo z nateznim preizkusom.

Določimo sedaj še velikosti krivinskega polmera  $R$  za palico z enakokrakim trapeznim prerezom (sl. 8 d) in velikostjo  $b_1 = 10 \text{ mm}$ ,  $b_2 = 4 \text{ mm}$ ,  $h = 20 \text{ mm}$ , ki jo krivimo na polmer  $r = r_1 + a_1 + z_s$ .

V tem primeru se težiščnica ne ujema z nevtralno osjo, zato velja  $z_s \neq 0$  in po enačbi (15)

$$z_s = 0,624 \text{ mm} \quad (\text{gl. obr. II})$$

kjer so  $a_1 = \frac{2 b_1 + b_2}{3 (b_1 + b_2)} h = 11,43 \text{ mm}$  in  $a_2 = h - a_1 = 8,57 \text{ mm}$  in polmer  $r = 112,053 \text{ mm}$ .

Krivinski polmer po razbremenitvi je po enačbi (17)

$$R = \frac{r}{1 - \frac{e}{d} \frac{\sigma_0 r}{E}} = 114,54 \text{ mm}$$

kjer sta

$$e = b_2 \left\{ 3 \left[ (a_1 + z_s)^2 + (z_s - a_2)^2 - 2 \left( \frac{\sigma_0 r}{E} \right)^2 \right] \right\} + \frac{a}{h} \left\{ (z_s - a_2)^2 \cdot (3 a_1 + 2 a_2 + z_s) + (a_1 + z_s) \cdot \left[ (a_1 + z_s)^2 - 2 \left( \frac{\sigma_0 r}{E} \right)^2 \right] \right\} = 4012,45 \text{ mm}^3$$

$$d = b_2 [2 (a_1^3 + a_2^3)] + \frac{a}{h} [2 (a_1 + z_s) (a_1^3 + a_2^3) - \frac{3}{2} (a_1^4 + a_2^4)] = 2222,25 \text{ mm}^3$$

V primeru, da je prerez enakokrak trikotnik (sl. 8 e) z velikostjo  $b_2 = 0$ , velikosti  $b_1 = 10 \text{ mm}$ ,  $h = 20 \text{ mm}$ , ki ga krivimo na polmer  $r = r_1 + a_1 + z_s$ , ima lego težiščnice glede na nevtralno os

$$z_s = 0,81 \text{ mm} \quad (\text{gl. obr. III})$$

kjer so:  $a_1 = \frac{2}{3} h$ ,  $a_2 = \frac{1}{3} h$ , polmer  $r = 114,14 \text{ mm}$  in s tem krivinski polmer po razbremenitvi

$$R = 116,82 \text{ mm} \quad (\text{gl. obr. IV})$$

#### LITERATURA

[1] K. A. Reckling: Plastizitätstheorie und ihre Anwendung auf Festigkeitsprobleme, Springer-Verlag, Berlin 1967.

[2] Alexander Mendelson: Plasticity: Theory and Application, New York, 1968.

[3] I. Borštnik: Diplomsko delo, Ljubljana, 1978.