

UDK 539.214

Uporaba robnih elementov v plastomehaniki

ANDRO ALUJEVIČ, PETER LEŠ in IZTOK POTRČ

Uporabo metode robnih elementov za obravnavanje plastičnega obnašanja gradiv opazimo v zadnjem obdobju kot nadaljnji razvoj tega numeričnega sredstva za reševanje problemov neprekinitenih medijev. V prispevku smo podali pregled nekaterih enačb plastifikacije v obliki, ki je primerna za delo z robnimi elementi. Z diskretizacijo površine telesa oziroma obrisa prereza dobimo matrični sistem enačb, ki ga nato razrešimo s procesom zaporednih približkov na digitalnem stroju. Podan je tudi opis razpoložljive programske opreme z izkušnjami pri testiranju.

1. Teorija

Ravnotežno enačbo, ob upoštevanju teorije majhnih deformacij, lahko zapišemo kot zvezo med pomiki (u) in specifičnimi deformacijami (ε) oziroma njihovimi časovnimi (\cdot) in krajevnimi ($,$) odvodi v obliki Navierove enačbe

$$\dot{u}_{i,ii} + \frac{1}{1-2\nu} \dot{u}_{l,lj} = 2 \left(\dot{\varepsilon}^p_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \dot{\varepsilon}^p_{v,j} \right) - b_j/\mu \quad (1)$$

kjer pomenijo ε^p_v prostorninski raztezek, b_j prostorninske sile, ν Poissonovo število in μ strižni modul, medtem ko so $\dot{\varepsilon}^p_{ij}$ plastične deformacije. Ustrezni mejni pogoji k zgornji enačbi so površinske sile p_i , ki so dane z enačbo

$$\begin{aligned} \dot{p}_i + 2\mu \left(\dot{\varepsilon}^p_{ij} n_j + \frac{\nu}{1-2\nu} \dot{\varepsilon}^p_v n_i \right) = \\ = \frac{2\mu \nu}{1-2\nu} \dot{u}_{l,l} n_i + \mu (\dot{u}_{i,i} + \dot{u}_{j,j}) \end{aligned} \quad (2)$$

kjer je n zunana normala površine (obrisa) telesa.

Integralska oblika enačbe robnih elementov, ki jo dobimo z načelom virtualnih pomikov, je naslednje oblike

$$\begin{aligned} c_{ij} \dot{u}_j = \int u^*_{ij} \dot{p}_j d\Gamma - \int p^*_{ij} \dot{u}_j d\Gamma + \\ + \int u^*_{ij} b_j d\Omega + \int \varepsilon^*_{jki} \dot{\sigma}^p_{jk} d\Omega \end{aligned} \quad (3)$$

kjer Γ pomeni površino (obris) telesa (prereza) Ω , medtem ko so tenzorji u^*_{ij} , p^*_{ij} in ε^*_{jki} pomiki, sile in deformacije zaradi delovanja koncentriranih enotnih obremenitev v smeri i , ki se v prostorskem ($\beta = 3$) in ravninskem deformacijskem ($\beta = 2$) stanju telesa glasijo ($\alpha = \beta - 1$, $\gamma = \beta + 1$)

$$u^*_{ij} = \frac{1}{16\pi(1-\nu)\mu r} \{(3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j}\} \quad (3D) \quad (4)$$

$$u^*_{ij} = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)\mu} \{(3-4\nu)\ln(r)\delta_{ij} - r_{,i}r_{,j}\} \quad (2D) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} p^*_{ij} = \frac{r^{-\alpha}}{4\alpha\pi(1-\nu)} & \left\{ [(1-2\nu)\delta_{ij} + \beta r_{,i}r_{,j}] \frac{\partial r}{\partial n} - \right. \\ & \left. -(1-2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^*_{jki} = \frac{-r^{-\alpha}}{8\alpha\pi(1-\nu)\mu} & \left\{ (1-2\nu)(r_{,k}\delta_{ij} + r_{,j}\delta_{ik}) - \right. \\ & \left. - r_{,i}\delta_{jk} + \beta r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

medtem ko so plastične napetosti

$$\dot{\sigma}^p_{ij} = 2\mu \dot{\varepsilon}^p_{ij} + \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \dot{\varepsilon}^p_v \delta_{ij} \quad (8)$$

Iz enačbe (3) dobimo izraz za napetosti v gradu v obliki

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} = \int u^*_{ijk} \dot{p}_k d\Gamma - \int p^*_{ijk} \dot{u}_k d\Gamma + \int u^*_{ijk} \dot{b}_k d\Omega + \\ + \int \sigma^*_{ijkl} \dot{\varepsilon}^p_{kl} d\Omega + g_{ij}(\dot{\sigma}^p_{kl}) \end{aligned} \quad (9)$$

kjer so ustrezni tenzorji

$$\begin{aligned} u^*_{ijk} = \frac{r^{-\alpha}}{4\alpha\pi(1-\nu)} & \left\{ (1-2\nu)(r_{,k}\delta_{ij} + \right. \\ & \left. + r_{,j}\delta_{ki} - r_{,i}\delta_{jk}) + \beta r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} p^*_{ijk} = \frac{\mu r^{-\beta}}{2\alpha\pi(1-\nu)} & \left\{ \beta [(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \right. \\ & + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) - \gamma r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \frac{\partial r}{\partial n} + \\ & + \beta\nu(n_i r_{,j}r_{,k} + n_j r_{,i}r_{,k}) + \\ & + (1-2\nu)(\beta n_k r_{,i}r_{,j} + n_j\delta_{ik} + n_i\delta_{jk}) - \\ & - (1-4\nu)n_k\delta_{ij} \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \sigma^*_{ijkl} = \frac{\mu r^{-\beta}}{2\alpha\pi(1-\nu)} & \left\{ \beta(1-2\nu)(\delta_{ij}r_{,k}r_{,l} + \right. \\ & + \delta_{lk}r_{,i}r_{,j}) + \beta\nu(\delta_{li}r_{,j}r_{,k} + \delta_{jk}r_{,l}r_{,i} + \\ & + \delta_{ik}r_{,l}r_{,j} + \delta_{jl}r_{,i}r_{,k}) - \beta\gamma r_{,i}r_{,j}r_{,k}r_{,l} + \\ & + (1-2\nu)(\delta_{ik}\delta_{lj} + \delta_{jk}\delta_{li}) - \\ & - (1-4\nu)\delta_{ij}\delta_{kl} \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

$$g_{ij} = \frac{-1}{15(1-\nu)} \{(7-5\nu)\dot{\sigma}^p_{ij} + (1-5\nu)\dot{\sigma}^p_{ll}\delta_{ij}\} \quad (3D) \quad (13)$$

$$g_{ij} = \frac{-1}{8(1-\nu)} \{2\dot{\sigma}^p_{ij} + (1-4\nu)\dot{\sigma}^p_{ll}\delta_{ij}\} \quad (2D) \quad (14)$$

Za numerično določitev enačb (3) in (9) moramo površino telesa razdeliti na izbrano število robnih elementov, medtem ko notranjost telesa razdelimo na celice, vendar samo tam, kjer pričakujemo pojav plastifikacije. Tako dobimo matrični sistem enačb

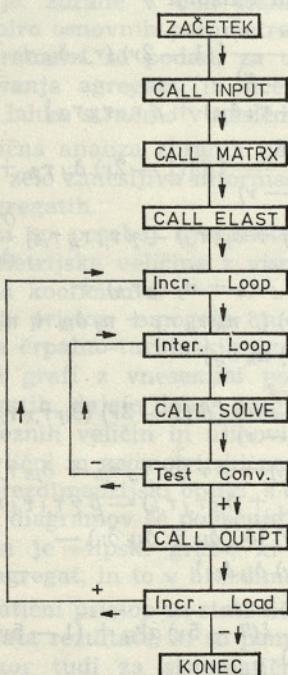
$$\mathbf{H} \vec{u} = \mathbf{G} \vec{p} + \mathbf{D} \vec{\epsilon}^p \quad (15)$$

$$\vec{\sigma} = \mathbf{G}' \vec{p} - \mathbf{H}' \vec{u} + (\mathbf{D}' + \mathbf{C}') \vec{\epsilon}^p \quad (16)$$

ki ga razrešimo iterativno z računalnikom po postopku zaporednih približkov. Podrobnosti so razvidne v objavljeni literaturi [1, 2, 3, 4].

2. Program

Računalniški program BEPLAS je napisan le za ravninsko analizo elasto-plastomehanskih problemov, ob upoštevanju Misesovega kriterija pričetka tečenja, z idealno oziroma tudi utrjevano plastifikacijsko karakteristiko, kar izberemo z vrednostmi tangencialnega modula. Glede na vrsto robnih elementov so uporabljene samo linearne interpolacijske funkcije mejnih pomikov in tlakov, medtem ko so plastične deformacije (v notranjih celicah) prav tako linearno interpolirane v trikotnikih. Časovno plastično obnašanje, ki je vsekakor nelinearno, zahteva koračno spreminjanje (stopnjevanje) obremenitve, znotraj vsakega koraka pa mora biti zagotovljena konvergenca (ob omejitvi števila iteracij).



Sl. 1. Diagram poteka računalniškega programa
(Macro Flow Chart of BEPLAS Code)

Slika 1 kaže osnovne značilnosti diagrama poteka glavnega programa. Ta vsebuje podprograme INPUT (ki bere podatke o geometriji in obremenitvah), MATRIX (ta vrednoti osnovne matrike, ki jih v izračunih lahko obdržimo nespremenljive, doči pa jih z Gaussovo numerično integracijo nesingularnih izrazov), ELAST (določi elastično rešitev oziroma pričetek plastifikacije v kritičnih točkah), SOLVE (razrešuje matrični sistem enačb z Gaussovo pivotirano metodo ter ocenjuje prirastek plastičnih deformacij) in OUTPUT (izpiše rezultate, ko je bila dosežena konvergenca znotraj vsakega obremenilnega koraka).

3. Izkušnje in sklep

Navedeni računalniški program za izračun ravninskih problemov plastifikacije smo kupili pri Computational Mechanics Ltd., Southampton konec leta 1981 in smo ga najprej testirali na CYBER stroju. Težave so se pojavile predvsem na zvezi med terminalom v Mariboru in računskim centrom v Ljubljani. Zato smo program prenesli na VAX računalnik in testiranje uspešno opravili do 31. 5. 1983 [8].

LITERATURA

- [1] J. C. F. Telles, C. A. Brebbia: Plasticity. *Progress in Boundary Element Methods*, Vol. 1, pp. 168–191. Pentech Press, London-Plymouth, 1981.
- [2] J. C. F. Telles, C. A. Brebbia: The Boundary Element Method in Plasticity. *Proc. 2nd Int. Seminar on Recent Advances in Boundary Element Methods*, pp. 295–317. Computational Mechanics Ltd. Publications, Southampton 1980.
- [3] J. C. F. Telles, C. A. Brebbia: New Developments in Elastoplastic Analysis. *Proc. 3rd Int. Seminar on Boundary Element Methods*, pp. 350–370. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1981.
- [4] J. C. F. Telles, C. A. Brebbia: Viscoplastic Analysis. *Proc. 4th Int. Seminar on Boundary Element Methods in Engineering*, pp. 327–348. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1982.
- [5] A. Alujević in sodelavci: Poročilo o raziskovalni nalogi. (*Aplikativni sistemi*). VTŠ Maribor, 1981.
- [6] A. Alujević in sodelavci: Poročilo o raziskovalni nalogi. (*Računalniški sistemi*). VTŠ Maribor, 1982
- [7] M. Morjaria, V. Sarihan, S. Mukherjee: Comparison of Boundary Element and Finite Element Methods in Two-Dimensional Inelastic Analysis. *Res Mechanica*, Vol. 1, pp. 3–20. Applied Science Publishers Ltd., London 1980.
- [8] I. Potrč, A. Alujević, P. Škerget: Metoda robnih elementov v ravninski plastomehaniki. 5. skup PPPR, Stubičke toplice, 1983.

Naslov avtorjev: prof. dr. Andro Alujević,
prof. dr. Peter Leš in
asistent Iztok Potrč,
VDO Visoka tehniška šola,
VTO strojništvo,
Univerza v Mariboru