YU — ISSN 0039-2480

STROJNIŠKI VESTNIK

LETNIK 31 LJUBLJANA, JULIJ—AVGUST 1985 ŠTEVILKA 7—8

UDK 532.516:532.542.2/.4

Rezultati izračuna hitrosti in temperatur v kanalu s prečno oviro

POLDE ŠKERGET IN ANDRO ALUJEVIČ

1. UVOD

Na podlagi toplotne prenosne enačbe lahko razrešimo tudi porazdelitev vrtinčnosti z isto kinetsko enačbo, v kateri nadomestimo difuzivnost z viskoznostjo ter temperaturo z vrtinčnostjo, medtem ko hitrost določimo s kinematsko enačbo. Vse tri primere rešujemo z robnimi elementi na iterativni način. Rezultati, ki jih dobimo za različne vrednosti Reynoldsovega in Pécletovega števila, so v tem sestavku podani le za kanal z notranjo pretočno oviro (krožni valj v prečnem toku laminarne viskozne tekočine).

2. USTALJENA KONVEKCIJA

Toplotni pojav je definiran z naslednjo eliptično diferencialno enačbo, kjer predpostavimo nespremenljivo prevodnost

$$a \Delta u - (\boldsymbol{v} \nabla) u = 0 \qquad /\mathrm{v}\ \Omega/ \tag{1}$$

z $a = k/c\varrho$, medtem ko so ustrezni mejni pogoji prve, druge in tretje vrste na robu $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$:

$$u = \bar{u}\ /\Gamma_1/,\ \partial u/\partial n = -\,q/k\ /\Gamma_2/,$$
$$\partial u/\partial n = -\,h/k\,.\,(u - u_f)\ /\Gamma_3/.$$

3. USTALJENI PRETOK FLUIDA

Gibanje nestisljivega viskoznega fluida je podano z Navier-Stokesovo in s kontinuitetno enačbo

$$(\boldsymbol{v} \nabla) \boldsymbol{v} = \boldsymbol{f} - \nabla p/\varrho + \nu \Delta \boldsymbol{v} \quad , \quad \nabla \boldsymbol{v} = 0 \tag{2}$$

Če uvedemo vrtinčnost

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{v} \tag{3}$$

se zgornja enačba (2) preoblikuje v nelinearno transportno enačbo

$$(\boldsymbol{v} \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \nabla) \boldsymbol{v} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega} \tag{4}$$

V ravninskih primerih ima vrtinčnost eno samo komponento, ki je pravokotna na ravnino toka, in je zato skalarna veličina

$$\omega = \partial v_y/\partial x - \partial v_x/\partial y \tag{5}$$

Zaradi ortogonalnosti med vrtinčnostjo in hitrostjo se enačba (4) poenostavi v obliko

$$\nu \Delta \omega - (\boldsymbol{v} \nabla) \omega = 0 \tag{6}$$

ki ima enako obliko kakor enačba (1), le da je namesto a tu ν, namesto u pa ω, kar omogoča enovit računski postopek.

4. ROBNI INTEGRALI

Nehomogeno eliptično diferencialno enačbo za skalarno funkcijo $u(s)$

$$\Delta u(s) + b(s) = 0 \qquad /\mathrm{v}\ \Omega/ \tag{7}$$

z mejnimi pogoji

$$u = \bar{u}(S)\ /\Gamma_1/,\ \partial u/\partial n = \bar{q}(S)\ /\Gamma_2/$$

lahko preoblikujemo v naslednjo integralsko enačbo

$$c(\xi)\, u(\xi) + \int u(S)\, q^*(\xi, S)\, \mathrm{d}\Gamma(S) =$$
$$= \int q(S)\, u^*(\xi, S)\, \mathrm{d}\Gamma(S) + \int b(s)\, u^*(\xi, s)\, \mathrm{d}\Omega(s) \tag{8}$$

kjer sta u^* osnovna rešitev in $q^* = \partial u^*/\partial n$ njen odvod v smeri normale, ki se za ravninske primere glasita

$$u^* = 1/2\,\pi\,.\,ln(1/r),\ q^* = 1/2\,\pi\,.\,d/r^2 \tag{9}$$

z $d = (x_i(\xi) - x_i(S))\,.\,n_i(S)$ in so n_i smerni kosinusi normale. Zgornja enačba (8) za solenoidna polja ($\nabla \boldsymbol{v} = 0$) dobi obliko

$$c(\xi)\, u(\xi) + \int u\, q^*\, \mathrm{d}\Gamma = \int q\, u^*\, \mathrm{d}\Gamma +$$
$$+ 1/a\,.\,(\int u\, \boldsymbol{v}\, (\nabla u^*)\, \mathrm{d}\Omega - \int u\, v_n\, u^*\, \mathrm{d}\Gamma) \tag{10}$$

kjer je $\nabla u^* = q_i^*$ in $v_n = v_i\,.\,n_i$, $i = 1,2$.

5. ROBNI ELEMENTI

Če uvedemo diskretizacijo z robnimi daljicami ($-1 < \eta < +1$) in notranjimi trikotnimi celicami ($\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 1$) s porazdelitvenimi funkcijami (linearnimi ozir. kvadratnimi)

$$\Phi = \{1 - \eta,\ 1 + \eta\}/2 \tag{11}$$
$$\Theta = \{\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3\}$$

ozir.

$$\Phi = \{\eta(\eta - 1),\ 2(1 - \eta^2),\ \eta(\eta + 1)\}/2$$
$$\Theta = \{\eta_1(2\eta_1 - 1),\ 4\eta_1\,\eta_2,\ \eta_2\,(2\eta_2 - 1),$$
$$4\eta_2\,\eta_3,\ \eta_3(2\eta_3 - 1),\ 4\eta_3\,\eta_1\} \tag{12}$$

dobimo diskretizirano obliko enačbe (10)

$$c(\xi)\, u(\xi) + \Sigma\, \boldsymbol{h}^T \boldsymbol{U}^n =$$
$$= \Sigma\, \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{Q}^n - 1/a\,.\,(\Sigma\, \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{U}^n - \Sigma\, \boldsymbol{d}^T \boldsymbol{U}^n) \tag{13}$$

kjer je treba ovrednotiti integrale v elementih oziroma celicah

$$\begin{aligned} \boldsymbol{h} &= \int \Phi\, q^*\, \mathrm{d}\Gamma_e \\ \boldsymbol{g} &= \int \Phi\, u^*\, \mathrm{d}\Gamma_e \\ \boldsymbol{c} &= \int \Phi(\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{V}_x{}^n\, n_x + \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{V}_y{}^n\, n_y)\, u^*\, \mathrm{d}\Gamma_e \\ \boldsymbol{d} &= \int \Theta(\boldsymbol{\Theta}^T \boldsymbol{V}_x{}^n\, q_x{}^* + \boldsymbol{\Theta}^T \boldsymbol{V}_y{}^n\, q_y{}^*)\, \mathrm{d}\Omega_e \end{aligned} \tag{14}$$

Z uporabo enačbe (13) v vseh robnih in notranjih točkah dobimo matrični sistem enačb

$$(\boldsymbol{H} + 1/a\,.\,(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{D}))\, \boldsymbol{U} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{Q} \tag{15}$$

in z upoštevanjem ustreznih mejnih pogojev

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F} \tag{16}$$

kar razrešimo z računalnikom.

6. KINETIKA TEKOČINE

Da razrešimo enačbo (6), zapišemo ustrezno integralsko formulacijo

$$c(\xi)\,\omega(\xi) + \int \omega\, q^*\, \mathrm{d}\Gamma = \int q\, u^*\, \mathrm{d}\Gamma + 1/\nu\,.\,(\int \omega\, \boldsymbol{v}\,(\boldsymbol{\nabla} u^*)\, \mathrm{d}\Omega - \int \omega\, v_n\, u^*\, \mathrm{d}\Gamma) \quad (17)$$

oziroma v diskretni obliki

$$c(\xi)\,\omega(\xi) + \Sigma\, \boldsymbol{h}^T \boldsymbol{W}^n = \Sigma\, \boldsymbol{g}^T \boldsymbol{Q}^n - 1/\nu\,.\,(\Sigma\, \boldsymbol{c}_x{}^T \boldsymbol{W} \boldsymbol{V}_x{}^n + \Sigma\, \boldsymbol{c}_y{}^T \boldsymbol{W} \boldsymbol{V}_y{}^n - \Sigma\, \boldsymbol{d}_x{}^T \boldsymbol{W} \boldsymbol{V}_x{}^n - \Sigma\, \boldsymbol{d}_y{}^T \boldsymbol{W} \boldsymbol{V}_y{}^n) \quad (18)$$

Z uporabo te enačbe (18) v vseh robnih vozlih dobimo matrični sistem

$$\boldsymbol{HW} = \boldsymbol{GQ} - 1/\nu\,.\,(\boldsymbol{C}_x \boldsymbol{W} \boldsymbol{V}_x + \boldsymbol{C}_y \boldsymbol{W} \boldsymbol{V}_y - \boldsymbol{D}_x \boldsymbol{W} \boldsymbol{V}_x - \boldsymbol{D}_y \boldsymbol{W} \boldsymbol{V}_y) \quad (19)$$

ki ga rešimo z računalnikom.

7. KINEMATIKA TEKOČINE

Da razrešimo enačbo (3) med vrtinčnostjo in hitrostjo, uvedemo vektorski potencial solenoidnega polja hitrosti

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\Psi}\,,\ \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\Psi} = 0\,,\ \Delta\boldsymbol{\Psi} = -\boldsymbol{\omega} \quad (20)$$

in dobimo v ravninskem primeru dve integralski enačbi

$$c(\xi)\, v_x(\xi) + \int v_x\, q^*\, \mathrm{d}\Gamma = \int v_y\, q_t{}^*\, \mathrm{d}\Gamma - \int \omega\, q_y{}^*\, \mathrm{d}\Omega$$
$$c(\xi)\, v_y(\xi) + \int v_y\, q^*\, \mathrm{d}\Gamma = \int \omega\, q_x{}^*\, \mathrm{d}\Omega - \int v_x\, q_t{}^*\, \mathrm{d}\Gamma \quad (21)$$

oziroma v diskretizirani obliki

$$c(\xi)\, v_x(\xi) + \Sigma\, \boldsymbol{h}^T \boldsymbol{V}_x{}^n = \Sigma\, \boldsymbol{h}_t{}^T \boldsymbol{V}_y{}^n - \Sigma\, \boldsymbol{d}_y{}^T \boldsymbol{W}^n$$
$$c(\xi)\, v_y(\xi) + \Sigma\, \boldsymbol{h}^T \boldsymbol{V}_y{}^n = \Sigma\, \boldsymbol{d}_x{}^T \boldsymbol{W}^n - \Sigma\, \boldsymbol{h}_t{}^T \boldsymbol{V}_x{}^n \quad (22)$$

kjer je dodatno definirani integral

$$\boldsymbol{h}_t = \int \Phi\, q_t{}^*\, \mathrm{d}\Gamma_e \quad (23)$$

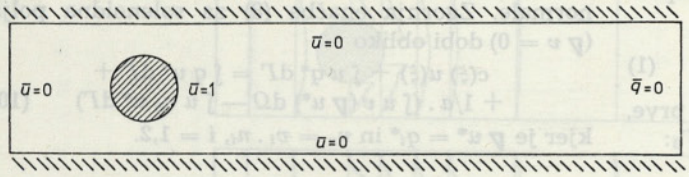
Z uporabo enačbe (22) v vseh robnih vozlih dobimo matrični sistem

$$\boldsymbol{HV}_x = \boldsymbol{H}_t \boldsymbol{V}_y - \boldsymbol{D}_y \boldsymbol{W}$$
$$\boldsymbol{HV}_y = \boldsymbol{D}_x \boldsymbol{W} - \boldsymbol{H}_t \boldsymbol{V}_x \quad (24)$$

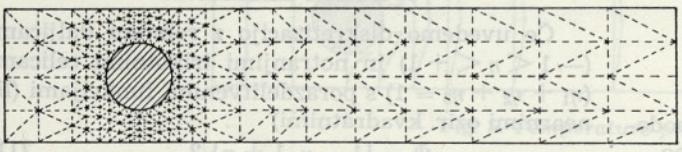
katerega razrešimo z računalnikom.

8. POSTOPEK REŠEVANJA

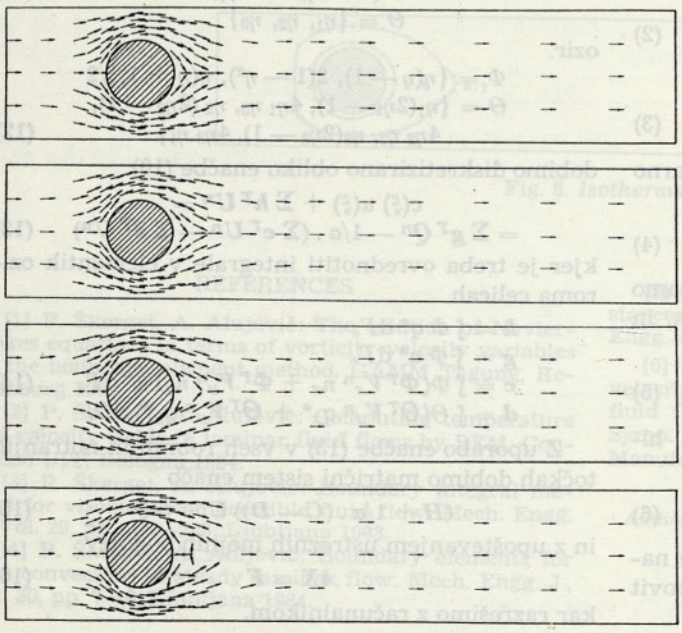
(a) Predpostavimo vrtinčnost v območju.
(b) Izračunamo vrtinčnost na robu.
(c) Ovrednotimo hitrost v območju.



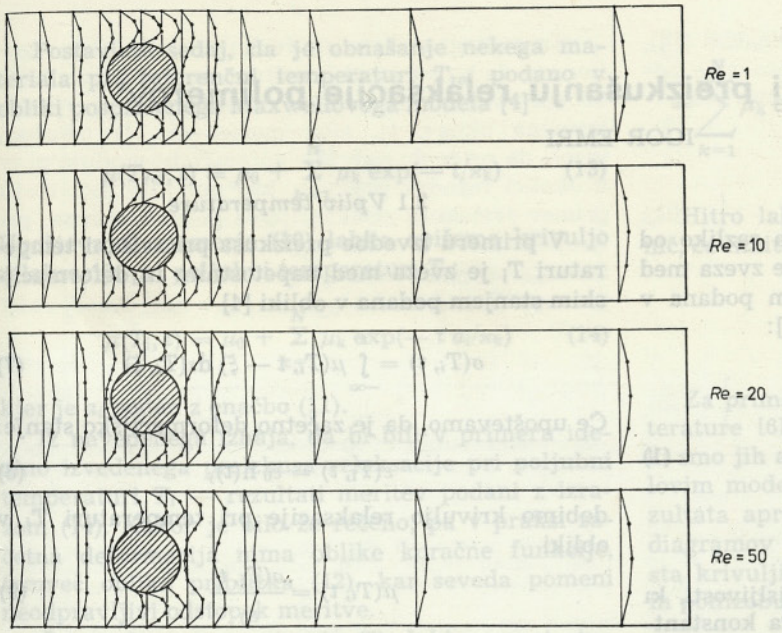
Sl. 1. *Termo-hidravlični problem kanala*



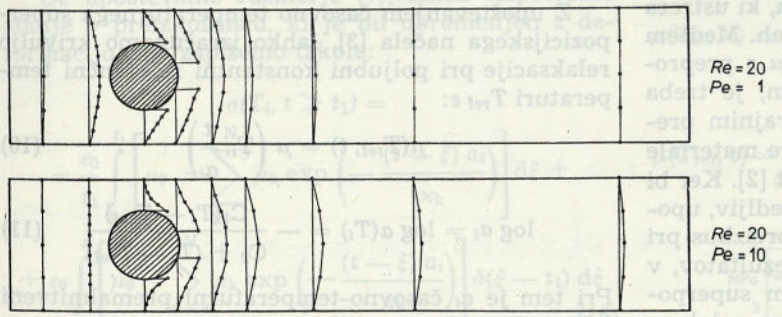
Sl. 2. *Diskretizacija kanala*



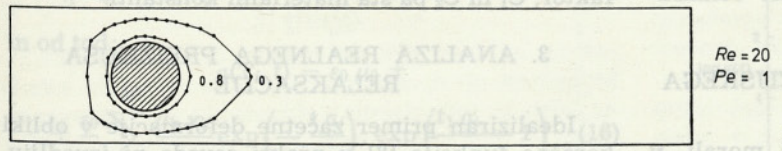
Sl. 3. *Hitrostno polje*



Sl. 4. *Hitrostni profili*



Sl. 5. *Temperaturni profili*



Sl. 6. *Izoterme*

(d) Določimo vrtinčni fluks na robu.
(e) Izračunamo vrtinčnost v območju.
(f) Iteriramo korake (b) do (e).
(g) Določimo temperaturno porazdelitev.

9. PRIMER KANALA Z OVIRO

V kanalu smo izbrali oviro v obliki krožnega valja, ki moti prečni tok laminarne viskozne nestisljive tekočine (sl. 1). Vstopni in izstopni hitrostni profil sta podana s parabolično rešitvijo. Temperaturni robni pogoji so na sliki 1.

Problem smo modelirali z 82 zveznimi (konformnimi) linearnimi robnimi elementi in 356 zveznimi linearnimi notranjimi celicami (sl. 2).

Rezultati hitrostnega polja za $Re = 1, 10, 20, 50$ so podani na sliki 3, medtem ko so hitrostni profili v_x komponente za ista Reynoldsova števila podani na sliki 4.

Toplotne razmere so prikazane na sliki 5 v obliki temperaturnih profilov za $Re = 20$, $Pe = 1, 10$ oziroma na sliki 6 v izotermah za $Re = 20$ in $Pe = 1$.

LITERATURA

[1] P. Škerget, A. Alujevič: The solution of Navier-Stokes equations in terms of vorticity-velocity variables by the boundary element method. GAMM Tagung, Regensburg 1984.

[2] P. Škerget, A. Alujevič: Computing temperature and velocity fields in laminar fluid flows by BEM. Congresso UIT, Bologna 1984.

[3] P. Škerget, A. Alujevič: Robna integralska metoda za tokove viskoznih nestisljivih fluidov. Strojniški vestnik, **29**, str. 199—203, Ljubljana 1983.

[4] P. Škerget, A. Alujevič: Robni elementi za konvekcijo toplote v ustaljenem laminarnem toku. Strojniški vestnik, **30**, str. 7—9, Ljubljana 1984.

[5] P. Škerget, A. Alujevič: Določevanje pretočnih razmer v kanalih s postopkom robnih elementov, Strojniški vestnik, **30**, str. 254—256, Ljubljana 1984.

[6] P. Škerget, A. Alujevič, Z. Rek: Računanje hitrostnih in temperaturnih polj v laminarnem toku viskozne tekočine z metodo robnih elementov. 6. simpozij »Projektiranje i praćenje proizvodnje računalom« (B2.03), Zagreb 1984.

Naslov avtorjev: Doc. dr. Polde Škerget, dipl. inž. stroj.
Red. prof. dr. Andro Alujević, dipl. inž. stroj.
Tehniška fakulteta, VTO strojništvo
62000 Maribor, Smetanova 17