

STROJNIŠKI VESTNIK

LETNIK 32

LJUBLJANA JULIJ—SEPTEMBER 1986

ŠTEVILKA 7—9

UDK 539.32

Transverzno izotropna termoelastičnost valja in krogle

ANDRO ALUJEVIĆ — MARJAN KROMAR

1. UVOD

Pogost vzrok za pojavljanje napetosti v trdnih telesih je neenakomerna temperaturna porazdelitev. Zato se pojavljajo toplotni raztezki

$$\varepsilon^0 = \alpha T \quad (1)$$

ki jih upoštevamo v konstitutivnem (Hookovem) zakonu glavnih napetosti

$$\begin{aligned} \sigma_n &= 2G \varepsilon_n + L(\varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_k) - 3L \varepsilon^0 \\ n &= i, j, k \end{aligned} \quad (2)$$

kjer sta Lamejevi konstanti izotropnega materiala

$$\begin{aligned} L &= \nu E / ((1 + \nu)(1 - 2\nu)) \\ G &= E / ((2(1 + \nu))) \end{aligned} \quad (3)$$

V dolgem valju ($i = r$, $j = \varphi$, $k = z$) velja, če je povsem preprečeno vzdolžno gibanje (tj. strogo ravninsko deformacijsko stanje),

$$\varepsilon_k = 0 \quad (4)$$

medtem ko je pri krogli ($i = r$, $j = \varphi$, $k = \vartheta$) v obeh ločnih smereh

$$\varepsilon_j = \varepsilon_k \quad (5)$$

Zaradi Cauchyjevih zvez (v povsem somernem polarnem primeru)

$$\varepsilon_i = du/dr \quad (6)$$

$$\varepsilon_j = u/r \quad (7)$$

ter ustrezne ravnotežne enačbe valja ($n = 1$) oziroma krogle ($n = 2$)

$$d\sigma_i/dr + n(\sigma_i - \sigma_j)/r = 0 \quad (8)$$

dobimo Navier-Lamejevo enačbo izotropne termoelastičnosti

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^n} \frac{d}{dr} (r^n u) \right) = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{d\varepsilon^0}{dr} \quad (9)$$

z mejnimi pogoji dolgega valja (cevi) oziroma votle krogle ($a \leq r \leq b$):

$$\sigma_i(r = a) = -p_a, \quad \sigma_i(r = b) = -p_b \quad (10)$$

ter pri dolgem polnem valju (palici) oziroma polni krogli ($0 \leq r \leq b$):

$$u(r = 0) = 0, \quad \sigma_i(r = b) = -p_b \quad (11)$$

Rešitve so dobro znane (npr. Timoshenko [1] in jih lahko povzamemo v naslednji obliki za dolgi votli valj in votlo kroglo (brez p_a in p_b vpliva, torej ko sta $p_a = p_b = 0$):

$$\sigma_i = \frac{n \alpha E / r^{n+1}}{1 - \nu} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{r^{n+1} - a^{n+1}}{b^{n+1} - a^{n+1}} \int_a^b T(r) r^n dr - \int_a^r T(r) r^n dr \right) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \sigma_j &= \frac{\alpha E / r^{n+1}}{1 - \nu} \left(\frac{n r^{n+1} + a^{n+1}}{b^{n+1} - a^{n+1}} \int_a^b T(r) r^n dr + \right. \\ &\quad \left. + \int_a^r T(r) r^n dr - T(r) r^{n+1} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

medtem ko so za dolgi polni valj oziroma polno kroglo (ob $p_b = 0$)

$$\sigma_i = \frac{n \alpha E}{1 - \nu} \left(\frac{1}{b^{n+1}} \int_0^b T(r) r^n dr - \frac{1}{r^{n+1}} \int_0^r T(r) r^n dr \right) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \sigma_j &= \frac{\alpha E}{1 - \nu} \cdot \\ &\quad \cdot \left(\frac{n}{b^{n+1}} \int_0^b T(r) r^n dr + \frac{1}{r^{n+1}} \int_0^r T(r) r^n dr - T(r) \right) \end{aligned} \quad (15)$$

ter je tretja komponenta (kadar imamo $\varepsilon_k = 0$) glavnih napetosti

— v dolgem (votlem in polnem) valju

$$\sigma_k = \nu(\sigma_i + \sigma_j) - E \alpha T(r) \quad (16)$$

— in pri (votli in polni) krogli

$$\sigma_k = \sigma_j \quad (17)$$

Temperaturno porazdelitev določimo iz toplotne enačbe prevajanja

$$\frac{1}{r^n} \frac{d}{dr} \left(r^n \lambda(T) \frac{dT}{dr} \right) + q(r) = 0 \quad (18)$$

ob ustreznih mejnih pogojih enostransko hlajenega telesa valja oziroma krogle: $r = a \dots dT/dr = 0$, $r = b \dots T = T_b$, medtem ko lahko toplotne vire in prevodnost q oziroma λ izberemo nespremenljive.

Zato velja obrazec temperaturne porazdelitve v valju in krogli

$$T(r) = T_b + q_0/(2(n+1)\lambda_0) \cdot (b^2 - r^2 + f) \quad (19)$$

kjer je v dolgem polnem valju in polni krogli

$$f = 0 \quad (20)$$

ter v dolgem votlem valju

$$f = 2a^2 \ln(r/b) \quad (21)$$

oziroma v votli krogli

$$f = 2a^3(1/b - 1/r) \quad (22)$$

Zgornji izraz temperature velja tudi pri zamenjani vlogi a in b , torej če je votlo telo valja ali krogla hlajeno le znotraj.

2. NEIZOTROPNA TERMOELASTIČNOST

Zaradi razlik med elastičnimi parametri transverzno izotropnega materiala

$$\begin{aligned} E_i &= E_j \neq E_k, \quad \nu_{ij} \neq \nu_{ik} = \nu_{jk}, \\ G_{ik} &= G_{jk} \neq G_{ij} = E_i/(2(1+\nu_{ij})) \end{aligned} \quad (23)$$

velja posplošeni Hookov zakon, zapisan v matrični obliki

$$\{\varepsilon\} = \mathbf{D}\{\sigma\} + \{\varepsilon^0\} \quad (24)$$

kjer je matrika Youngovih elastičnih parametrov

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_1, D_2, D_3 \\ D_2, D_1, D_3 \\ D_3, D_2, D_1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

in so:

$$D_1 = 1/E_i \quad (26)$$

$$D_2 = -\nu_{ij}/E_i \quad (27)$$

$$D_3 = -\nu_{ik}/E_k \quad (28)$$

$$D_4 = 1/E_k \quad (29)$$

Obratna oblika Hookovega zakona pa ima naslednji matrični zapis

$$\{\sigma\} = \mathbf{C}\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^0\} \quad (30)$$

kjer je

$$\mathbf{C} = \mathbf{D}^{-1} \quad (31)$$

matrika Lamejevih elastičnih parametrov

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_1, C_2, C_3 \\ C_2, C_1, C_3 \\ C_3, C_2, C_1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

in so:

$$C_1 = C_0(1 - \nu_{ik}^2 E_i/E_k) \quad (33)$$

$$C_2 = C_0(\nu_{ij} + \nu_{ik}^2 E_i/E_k) \quad (34)$$

$$C_3 = C_0 \nu_{ik}(1 + \nu_{ij}) \quad (35)$$

$$C_4 = C_0(1 - \nu_{ij}^2) E_k/E_i \quad (36)$$

oziroma

$$C_0 = E_i / ((1 + \nu_{ij})(1 - \nu_{ij} - 2\nu_{ik}^2 E_i/E_k)) \quad (37)$$

kar velja za valj, medtem ko imamo pri krogli lahko le izotropne elastične parametre (saj ne obravnavamo večplastnih teles):

$$C_1 = C_4 = L + 2G, \quad C_2 = C_3 = L \quad (38)$$

Toplotni raztezki valja so v splošnem

$$\varepsilon_i^0 \neq \varepsilon_j^0 \neq \varepsilon_k^0 \quad (39)$$

medtem ko imamo v primeru krogle opravka s topotno razteznostjo v obliki

$$\varepsilon_i^0 \neq \varepsilon_j^0 = \varepsilon_k^0 \quad (40)$$

Ustrezena Navier-Lamejeva enačba valja in krogle se sedaj glasi

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^n} \frac{d}{dr} (r^n u) \right) = \\ &= \frac{d\varepsilon_i^0}{dr} + \frac{C_2}{C_1} \frac{d\varepsilon_j^0}{dr} + \frac{C_3}{C_1} \frac{d\varepsilon_k^0}{dr} + \frac{n}{r} \frac{C_1 - C_2}{C_1} (\varepsilon_i^0 - \varepsilon_j^0) \end{aligned} \quad (41)$$

katere rešitev, zapisana za glavne napetosti, pa je za dolgi votli valj in votlo kroglo

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{(C_1 - C_2)(C_1 + nC_2)}{\frac{n+1}{n} \cdot C_1} \cdot \\ &\cdot \left(\int_a^r (\Delta \varepsilon) \frac{dr}{r} - \frac{b^{n+1}(r^{n+1} - a^{n+1})}{(b^{n+1} - a^{n+1}) r^{n+1}} \int_a^b (\Delta \varepsilon) \frac{dr}{r} - \right. \\ &- \frac{1}{r^{n+1}} \int_a^r (\Sigma \varepsilon) r^n dr + \frac{r^{n+1} - a^{n+1}}{r^{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})} \cdot \\ &\cdot \left. \int_a^b (\Sigma \varepsilon) r^n dr \right) + (p_b b^{n+1}(a^{n+1} - r^{n+1}) - \\ &- p_a a^{n+1}(b^{n+1} - r^{n+1}))/ (r^{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})) \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \sigma_j &= \frac{(C_1 - C_2)(C_1 + nC_2)}{\frac{n+1}{n} C_1} \cdot \\ &\cdot \left(\int_a^r (\Delta \varepsilon) \frac{dr}{r} - \frac{b^{n+1}(r^{n+1} + a^{n+1}/n)}{(b^{n+1} - a^{n+1}) r^{n+1}} \int_a^b (\Delta \varepsilon) \frac{dr}{r} + \right. \\ &+ \frac{1}{n r^{n+1}} \int_a^r (\Sigma \varepsilon) r^n dr + \frac{r^{n+1} + a^{n+1}/n}{r^{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})} \cdot \\ &\cdot \left. \int_a^b (\Sigma \varepsilon) r^n dr - \frac{n+1}{n} \right. \\ &\cdot \varepsilon_j^0 - (2-n) 2C_3/(C_1 + C_2) \cdot \varepsilon_k^0 \left. \right) + \\ &+ (-p_b b^{n+1}(a^{n+1}/n + r^{n+1}) + \\ &+ p_a a^{n+1}(b^{n+1}/n + r^{n+1}))/ (r^{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})) \end{aligned} \quad (43)$$

medtem ko so za dolgi polni valj in polno kroglo ustreznii obrazci

$$\sigma_i = \frac{(C_1 - C_2)(C_1 + nC_2)}{\frac{n+1}{n} \cdot C_1} \left(- \int_r^b (\Delta \varepsilon) \frac{dr}{r} - \frac{1}{r^{n+1}} \cdot \int_0^r (\Sigma \varepsilon) r^n dr + \frac{1}{b^{n+1}} \int_0^b (\Sigma \varepsilon) r^n dr \right) - p_b \quad (44)$$

$$\sigma_j = \frac{(C_1 - C_2)(C_1 + nC_2)}{\frac{n+1}{n} \cdot C_1} \left(- \int_r^b (\Delta \varepsilon) \frac{dr}{r} + \frac{1}{n r^{n+1}} \cdot \int_0^r (\Sigma \varepsilon) r^n dr + \frac{1}{b^{n+1}} \int_0^b (\Sigma \varepsilon) r^n dr - \frac{n+1}{n} \cdot \varepsilon_i^0 - (2-n) 2C_3/(C_1 + C_2) \cdot \varepsilon_k^0 \right) - p_b \quad (45)$$

kjer pomenita skupni označbi vsoto in razliko toplotnih raztezkov

$$(\Sigma \varepsilon) = \varepsilon_i^0 + n \varepsilon_j^0 + (2-n) 2C_3/(C_1 + C_2) \varepsilon_k^0 \quad (46)$$

$$(\Delta \varepsilon) = \varepsilon_i^0 - \varepsilon_j^0 \quad (47)$$

Tretja komponenta napetosti (ob podmeni, da je $\varepsilon_k = \text{konst.}$, tj. $d\varepsilon_k/dr = 0$, kar je stvarno ravninsko deformacijsko stanje mesto strogega, ki je definirano z $\varepsilon_k = 0$) pa je v dolgem votlem valju

$$\begin{aligned} \sigma_k = & \frac{C_3}{C_1 + C_2} \cdot (\sigma_i + \sigma_j + 2 \cdot (p_b \cdot b^2 - \\ & - p_a \cdot a^2)/(b^2 - a^2)) - (2C_3^2/(C_1 + C_2) - C_4) \cdot \\ & \cdot \left(2/(b^2 - a^2) \cdot \int_a^b \varepsilon_k^0 r dr - \varepsilon_k^0 \right) \end{aligned} \quad (48)$$

kar seveda ustrezeno velja tudi za dolgi polni valj ($a = 0$), tj.

$$\sigma_k = \frac{C_3}{C_1 + C_2} \cdot$$

$$\begin{aligned} & \cdot (\sigma_i + \sigma_j + 2p_b) - (2C_3^2/C_1 + C_2) - C_4 \cdot \\ & \cdot \left(2/b^2 \cdot \int_0^b \varepsilon_k^0 r dr - \varepsilon_k^0 \right) \end{aligned} \quad (49)$$

medtem ko za (polno in votlo) kroglo velja enačba (17) $\sigma_k = \sigma_j$.

Pri polnem valju oziroma polni krogli dobimo v limiti ($r = 0$) vrednosti radialne in obročne napetosti (po l'Hôpitalovem pravilu)

$$\begin{aligned} \sigma_i^0 = & \frac{(C_1 - C_2) \cdot (C_1 + nC_2)}{\frac{n+1}{n} \cdot C_1} \left(- \int_0^b (\Delta \varepsilon) \frac{dr}{r} - \right. \\ & \left. - \frac{(\Sigma \varepsilon)}{n+1} + \frac{1}{b^{n+1}} \int_0^b (\Sigma \varepsilon) r^n dr \right) - p_b \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \sigma_j^0 = & \frac{(C_1 - C_2)(C_1 + nC_2)}{\frac{n+1}{n} \cdot C_1} \left(- \int_0^b (\Delta \varepsilon) \frac{dr}{r} + \right. \\ & + \frac{(\Sigma \varepsilon)}{n(n+1)} + \frac{1}{b^{n+1}} \int_0^b (\Sigma \varepsilon) r^n dr - \\ & \left. - \frac{n+1}{n} \varepsilon_i^0 - (2-n) \frac{2C_3}{C_1 + C_2} \varepsilon_k^0 \right) - p_b \end{aligned} \quad (51)$$

tako da je njuna razlika na vrtilni osi ($r = 0$)

$$\sigma_i^0 - \sigma_j^0 = \frac{(C_1 - C_2)(C_1 + nC_2)}{\frac{n+1}{n} \cdot C_1} (\varepsilon_j^0 - \varepsilon_i^0)/2 \quad (52)$$

in se $d\sigma_i/dr$ pri $r = 0$ iznici le, če sta $\varepsilon_i^0 = \varepsilon_j^0$.

3. PODATKI IN REZULTATI

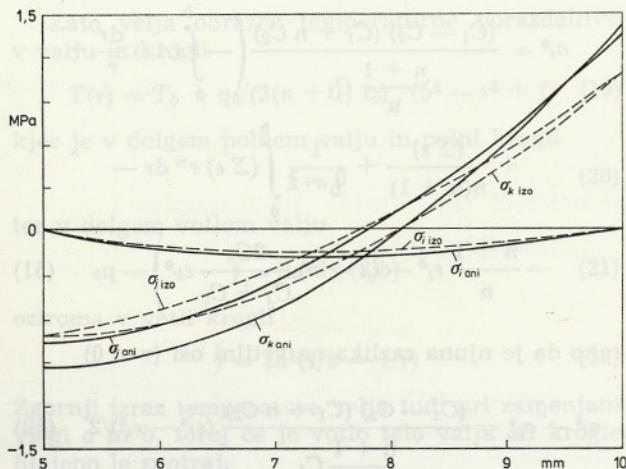
Izbrali smo parametre keramičnega jedrskega goriva (UO_2 , SiC in grafitna posteljica [2, 3]):

$E_i = E_k = 4 \text{ GPa}$	— Youngov modul elastičnosti
$\nu_{ij} = \nu_{ik} = 0.15$	— Poissonovo število
$a_i = 3 \text{ ppm/K}$	— radialna topotna razteznost
$a_k = 4 \text{ ppm/K}$	— aksialna topotna razteznost
$T_b = 1000 \text{ K}$	— površinska temperatura ($r = b$)
$q_0 = 250 \text{ MW/m}^3$	— topotna moč goriva
$\lambda_0 = 20 \text{ W/mK}$	— topotna prevodnost
$a = 0; 5 \text{ mm}$	— notranji polmer valja oziroma krogle (polno in votlo telo)
$b = 5; 10 \text{ mm}$	— zunanji polmer valja oziroma krogle (polno in votlo telo)
$p_a = 0 \text{ MPa}$	— notranji tlak (votlo telo)
$p_b = 0 \text{ MPa}$	— zunanji tlak (votlo in polno telo)

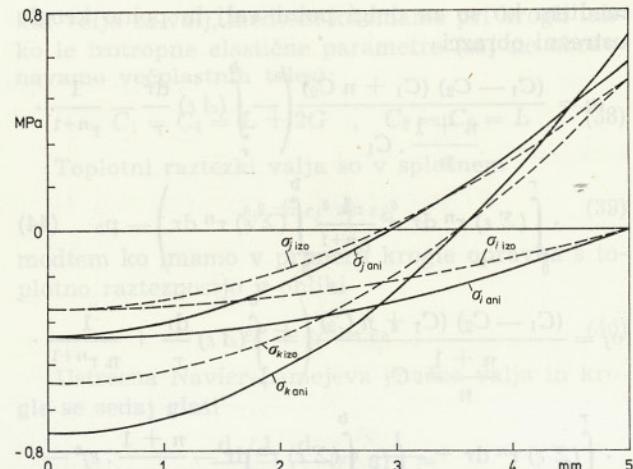
S temi številskimi vrednostmi smo računalniško (Simpsonova integracija) ovrednotili rezultate (slike 1 do 4), ki jasno kažejo poteke napetosti v glavnih smereh (tam so strižne nič) cevi, palice ter votle in polne krogle. Napetosti zaradi površinskih tlakov so preprosto adiktivne k podanim vrednostim.

4. SKLEP

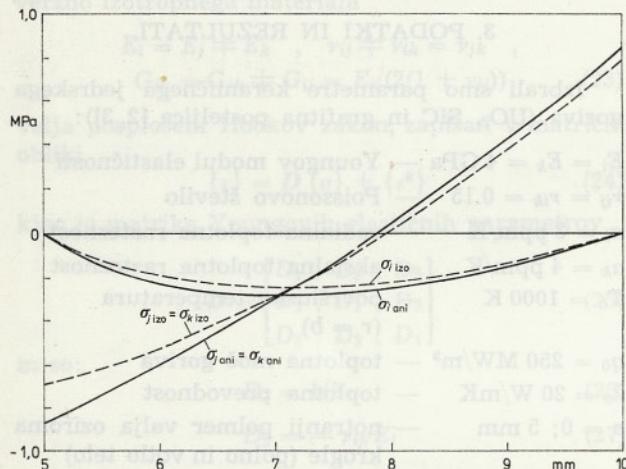
Dopolnili smo doslej znane izraze za napetosti transverzno izotropne termoelastičnosti, ki so bili na voljo le za votle valje (Head idr. [4, 5, 6, 7]) z obrazci za votlo kroglo, kakor tudi za polni valj in polno kroglo. Uporabili smo številske podatke za keramiko, dasiravno so razmere v kovinah zelo podobne (morda le manj izrazite).



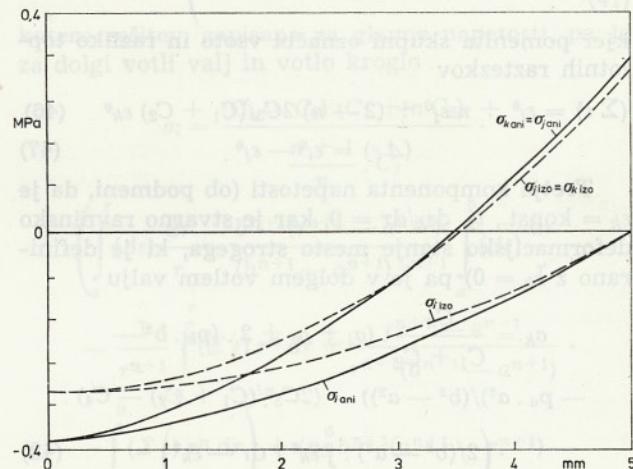
Sl. 1. Napetosti v cevi



Sl. 2. Napetosti v palici



Sl. 3. Napetosti v votli krogli



Sl. 4. Napetosti v polni krogle

LITERATURA

- [1] Timoshenko S.: Theory of elasticity. McGraw-Hill, Tokyo 1951.
- [2] Everett M. R., Manzel R.: Irradiation data on pressed Gilso carbon and pitch coke graphite. Technical Note, Dragon Project, Winfrith 1970.
- [3] Everett M. R., Manzel R.: Dimensional data for coated particle fuel compacts irradiated in the Dragon reactor. Technical Note, Dragon Project, Winfrith 1970.
- [4] Head J. L., Sockalingam K. C.: Radiation damage stresses in the graphite of power producing nuclear reactors. J. Mech. Eng. Sci., Vol. 30, No. 5, 1968.
- [5] Jezernik A., Head J. L.: Calculation of stresses in the graphite fuel tubes of a high temperature reactor. Atomkernenergie, Vol. 18, No. 1, 1971.

[6] Alujević A., Head J. L.: Heat transfer and stress-strain analysis of tubular fuel elements. Atomkernenergie, Vol. 20, No. 4, 1972.

[7] Alujević A., Cernej B., Potrč I., Škerget P.: Stresses due to fuel-cladding interactions. Spominski zbornik A. Kuhinja, SAZU, Ljubljana 1982 (str. 139–151).

Naslov avtorjev: Prof. dr. Andro Alujević, dipl. inž.

Tehniška fakulteta, VTO strojništvo
Univerza v Mariboru

Asistent Marjan Kromar, dipl. inž. fiz.
Institut Jožef Stefan, Odsek R-1
Univerza Edvarda Kardelja v Ljubljani