YU — ISSN 0039-2480

STROJNIŠKI VESTNIK

LETNIK 34 LJUBLJANA, JULIJ—SEPTEMBER 1988 ŠTEVILKA 7—9

UDK 534.014.5:534.282:531.39

Kaotično gibanje omejenega resonančnega sistema

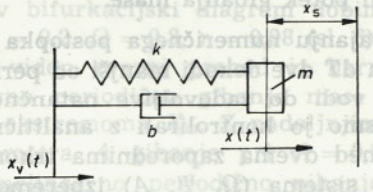
EDVARD GOVEKAR — IGOR GRABEC

1. UVOD

Pojav resonance v strojništvu pogosto povzroča težave, zato se mu skušamo izogniti z dušenjem sistema ali z uporabo omejevalnika gibanja. Omejevalnik povzroči silo na nihajočo maso le pri dovolj velikih amplitudah nihanja. Gibanje mase zato ni več harmonično in pojavita se vprašanji: kakšno je to gibanje in kako ga opišemo? Vpliv omejevalnika lahko v gibalnih enačbah sistema predstavimo s členom, ki je nelinearno odvisen od amplitude nihanja. Za nelinearne sisteme pa je znano, da se lahko obnašajo kaotično [1], [2]. Problematika omejenih resonančnih nihanj je bila zato obravnavana že v mnogih prispevkih [3], [4]. V teh prispevkih je ugotovljeno, da trki mase z omejevalnikom povzročijo poleg neharmonskega tudi kaotično gibanje. Namen tega članka je pokazati, da se kaotično obnašanje pojavi tudi v preprostem resonančnem sistemu, ki mu dodamo nepremični omejevalnik gibanja. Takšen sistem predstavimo z maso, pritrjeno na vzbujano vijačno vzmet, in dušilko, ki ji gibanje omejuje nepremična stena. Matematični model tega sistema je predstavljen v drugem delu članka. Dinamiko nihanja mase na prožni vijačni vzmeti lahko opišemo analitično. Vključitev nelinearnega člena pa v našem primeru povzroči, da splošna analitična obravnava ni mogoča. Tako preostane numerično reševanje ustreznih gibalnih enačb, ki je predstavljeno v tretjem delu članka. Dobljeni časovni poteki gibanja mase prikazujejo v določenih območjih značilnih parametrov sistema kaotično obnašanje. Za njegovo karakterizacijo so zato uporabljene metode kaotične dinamike [1], [2].

2. MATEMATIČNI MODEL

Skica obravnavanega resonančnega sistema je prikazana na sliki 1. Masa je z linearno vzmetjo in linearno dušilko pritrjena na podlago, ki harmonsko niha po zakonu



Sl. 1. *Shema omejenega resonančnega sistema*

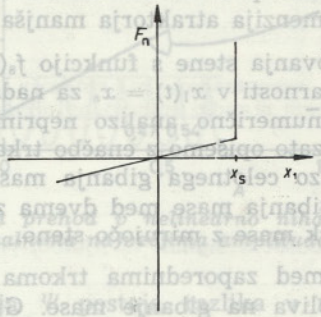
$$x_v(t) = x_0 \sin(\omega t) \quad (1).$$

V stanju mirovanja je masa za x_s oddaljena od nepremične stene, ki predstavlja omejevalnik gibanja (sl. 1). Delovanje linearne vzmeti in omejevalnika gibanja na maso lahko skupaj opišemo z nadomestno silo

$$F_n = k(x - x_v) + f_s(x) \quad (2),$$

ki predstavlja silo nadomestne vzmeti z nelinearno karakteristiko (sl. 2). V enačbi 2 pomenijo k — linearno vzmetno konstanto, x — absolutni premik mase in $f_s(x)$ nelinearni člen, ki opisuje delovanje stene:

$$f_s(x) = \{0 \text{ za } x < x_s;\ \infty \text{ za } x \geq x_s\} \quad (3).$$



Sl. 2. *Nelinearna karakteristika nadomestne vzmeti*

Po sliki 1 ter enačbah (1) in (2) napišemo nelinearno diferencialno enačbo gibanja mase v odvisnosti od časa t:

$$m\ddot{x} = -b(\dot{x} - \dot{x}_v) - k(x - x_v) - f_s(x) \quad (4).$$

V zgornji enačbi je b linearni koeficient viskoznega trenja, s piko je označeno odvajanje po času t. Sistem je zaradi navzočnosti časovno odvisnega vzbujevalnega člena x_v v enačbi (1) neavtonomen. Za avtonomne sisteme obstajajo splošne metode analize kaotične dinamike [1], [2], zato je primerno obravnavani sistem prikazati v avtonomni obliki. V ta namen predstavimo časovno odvisni člen x_v kot rešitev diferencialne enačbe

$$\ddot{x}_v + \omega^2 x_v = 0 \quad (5).$$

Obravnavani sistem lahko na podlagi enačbe (4) in (5) predstavimo v avtonomni obliki s sistemom diferencialnih enačb prvega reda

$$\dot{X} = F(X) \qquad (6),$$

ki opisuje hitrost spreminjanja vektorja stanja $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Pri tem je $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = x_v$, $x_4 = \dot{x}_v$. Eksplicitna oblika zapisa sistema enačbe (6) je:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{b}{m}(x_2 - x_4) - \frac{k}{m}(x_1 - x_3) - f_s(x) \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -\omega^2 x_3 \end{aligned}\right\} \qquad (6).$$

Iz lastnosti sil, delujočih v obravnavanem sistemu, sledi, da je:

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} < 0 \qquad (7).$$

To po definiciji disipativnih sistemov [1], [2] pomeni, da je obravnavani sistem disipativen. Gibanje takšnega sistema se lahko v faznem prostoru odvija le na atraktorju, ki ima manjšo dimenzijo kot fazni prostor [1], [2]. V našem primeru je fazni prostor štiridimenzionalen, zato mora biti dimenzija atraktorja manjša od štiri.

Opis delovanja stene s funkcijo $f_s(x)$ je zaradi njene singularnosti v $x_1(t) = x_s$ za nadaljnjo matematično in numerično analizo neprimeren. Delovanje stene zato opišemo z enačbo trka dveh teles. S tem analizo celotnega gibanja mase razdelimo na analizo gibanja mase med dvema zaporednima trkoma in trk mase z mirujočo steno.

V času med zaporednima trkoma ($x_1(t) < x_s$) stena ne vpliva na gibanje mase. Gibanje mase lahko zato na podlagi sistema enačb (5) z upoštevanjem enačbe (1) in pripadajočega odvoda po času t opišemo v naslednji obliki:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 + C\sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \qquad (8).$$

Pri tem je

$$C\sin(\omega t + \varphi) = k\, x_0 \sin(\omega t) + b\, x_0\, \omega \cos(\omega t).$$

V trenutku trka mase s steno ($x_1(t) = x_s$) se masi spremeni smer in velikost hitrosti po zakonu

$$x_{20} = -r\, x_{2n} \qquad (9).$$

V zgornji enačbi so x_{2n} — naletna hitrost mase, r — koeficient trka, x_{20} — odbojna hitrost mase.

Matematični model, ki rabi za nadaljnjo numerično analizo sistema, je tako predstavljen s sistemom enačb (8) in enačbo (9).

3. POTEK NUMERIČNEGA REŠEVANJA NELINEARNE DIFERENCIALNE ENAČBE GIBANJA MASE

Zaradi preglednosti numeričnega reševanja predstavimo sistem enačb (8) in enačbo (9) v normirani in brezdimenzijski obliki:

$$\left.\begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_2 \\ \dot{X}_2 &= -2\Psi X_2 - X_1 + A\sin(\Omega T) + \\ &\quad + 2\Psi\, \Omega\, A\cos(\Omega T) \end{aligned}\right\} \qquad (10),$$

$$X_{20} = -r\, X_{2n} \qquad (11).$$

Pri tem pomenijo: $X_1 = x_1/x_0$ — brezdimenzijski odmik mase, $\Omega = \omega/\omega_0$ — razmerje vzbujevalne in lastne frekvence, $T = t\,\omega_0$ — brezdimenzijski čas, $X_2 = dX_1/dT$ — normirano hitrost mase, Ψ — brezdimenzijski koeficient dušenja, $A = x_0/x_s$ — brezdimenzijsko največjo amplitudo vzbujanja, X_{2n} — brezdimenzijsko naletno hitrost mase, X_{20} — brezdimenzijsko odbojno hitrost mase.

Z upoštevaijem enačb (10) in (11) lahko nelinearno gibalno diferencialno enačbo mase (enačba (3)) rešujemo takole: do prvega trka mase z omejevalnikom gibanja je rešitev podana s partikularno rešitvijo $X_{1,0}(T)$ sistema enačb (10), ki jo za poljubno izbrane začetne pogoje ($X_1(0) = \alpha$, $X_2(0) = \beta$) lahko določimo analitično ali numerično. Ob času prvega trka mase s steno, ki je določen s pogojem

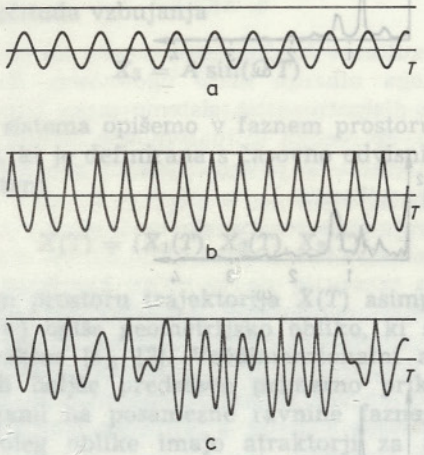
$$X_{1,0}(T) = X_s \quad , \quad X_s = x_s/x_s = 1 \qquad (12),$$

se hitrost mase spremeni po enačbi (11). Čas prvega trka T_1 lahko določimo samo z numerično rešitvijo transcendentne enačbe, ki jo predstavlja pogoj, podan z enačbo (12). V ta namen uporabimo metodo bisekcije [5], za katero potrebujemo diskretno podano partikularno rešitev $X_{1,0}(T)$. Računski postopek teče hitreje, če diskretne vrednosti $X_{1,0}(T)$ računamo z metodo Runge-Kutta IV [5], kakor če jih računamo iz analitično podane rešitve, ki obsegajo niz trigonometričnih funkcij. Naletna hitrost mase ob času j-tega trka T_j $\{X_{2n} = X_{2,j-1}(T_j)\}$ z upoštevanjem enačbe (12) in lege mase ob času j-tega trka $\{X_{1,j-1}(T_j) = X_s\}$ predstavljata začetne pogoje za določitev nove partikularne rešitve $X_{1,j}(T)$. Rešitev $X_{1,j}(T)$ velja do naslednjega časa trka T_{j+1}, ki je določen z rešitvijo transcendentne enačbe $X_{1,j}(T) = X_s$. Opisani postopek reševanja nadaljujemo, dokler nas zanima časovni potek gibanja mase.

Pri izvajanju numeričnega postopka smo vzeli korak časa dT dve dekadi manjši od periode vzbujanja. To vodi do zadovoljive natančnosti rezultatov, ki smo jo kontrolirali z analitično podano rešitvijo med dvema zaporednima trkoma. Druge parametre sistema (Ω, Ψ, A) izberemo tako, da pride do trka mase s steno zaradi resonance.

4. ANALIZA IN KARAKTERIZACIJA OMEJENEGA RESONANČNEGA GIBANJA

Značilni primeri časovnega poteka resonančnih gibanj mase, dobljeni z opisanim numeričnim postopkom, so prikazani na sliki 3. Iz časovnih potekov gibanja vidimo, da pri različnih vrednostih parametrov sistema (Ω, Ψ, A, r) lahko dobimo

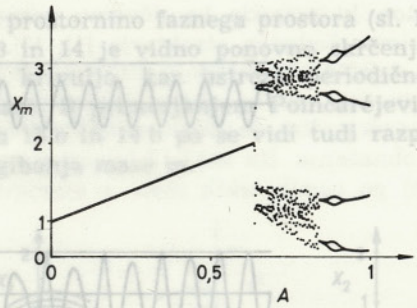


Sl. 3. *Značilni časovni poteki gibanj mase*

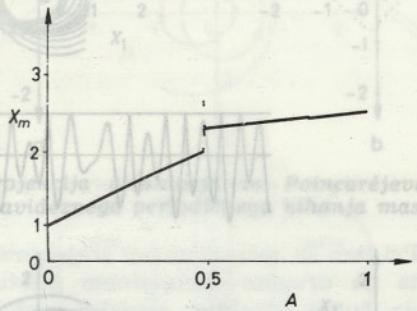
harmonično (sl. 3 a), nelinearno periodično (sl. 3 b) in navidez kaotično gibanje (sl. 3 c). Zato je primerno raziskati vpliv značilnih parametrov sistema na način gibanja mase. V ta namen uporabimo diagram, v katerem prikažemo vrednosti lokalnih največjih oddaljenosti mase X_m od omejevalnika gibanja v odvisnosti od največje amplitude vzbujanja A. Harmoničnemu gibanju ustreza v diagramu pri določeni vrednosti parametra A ena sama točka (A, X_m). Kadar je gibanje neharmonično, lahko v časovnem poteku opazimo več različnih lokalnih maksimumov $X_{m,i}$ in zato dobimo v diagramu pri določeni vrednosti A več točk (A, $X_{m,i}$), s spreminjanjem parametra A se zato pri prehodu iz harmoničnega v neharmonično gibanje pojavi razcep značilne krivulje, določene z urejenimi pari $\{A, X_m\}$, na dve ali več vej. Razcep krivulje imenujemo bifurkacija, nastali diagram pa bifurkacijski diagram [1], [2].

Iz bifurkacijskih diagramov lahko ugotovimo, da pride do prehoda harmoničnega v neregularno gibanje mase le pri majhnih disipativnostih sistema (sl. 4). Pri velikih disipativnostih pa trki ne povzročijo izrazitejših sprememb harmoničnega gibanja (sl. 5) [6].

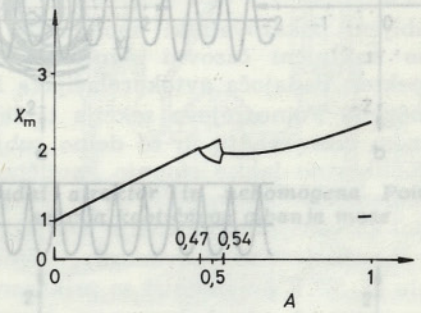
Zanimiv bifurkacijski diagram dobimo za parametre $\Psi = 0{,}2$, $\Omega = 0{,}8$, $r = 0{,}98$ (sl. 6). Pri $A = 0{,}47$ je viden zvezni prehod iz harmoničnega v nelinearno periodično gibanje mase z dvema lokalnima ekstremoma X_m. Z nadaljnjim naraščanjem parametra A gibanje pri $A = 0{,}54$ zvezno preide v nelinearno periodično nihanje z enim lokalnim ekstremom. Z zmanjševanjem koefici-



Sl. 4. *Bifurkacijski diagram za parametre* ($\omega = 0{,}6$, $\psi = 0{,}005$, $r = 0{,}5$)

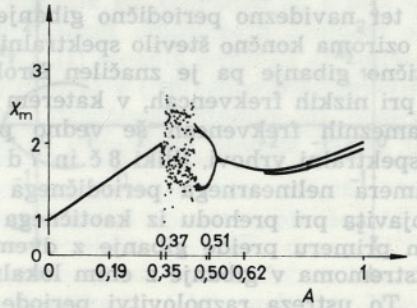


Sl. 5. *Bifurkacijski diagram za parametre* ($\omega = 1{,}2$, $\psi = 0{,}1$, $r = 0{,}98$)

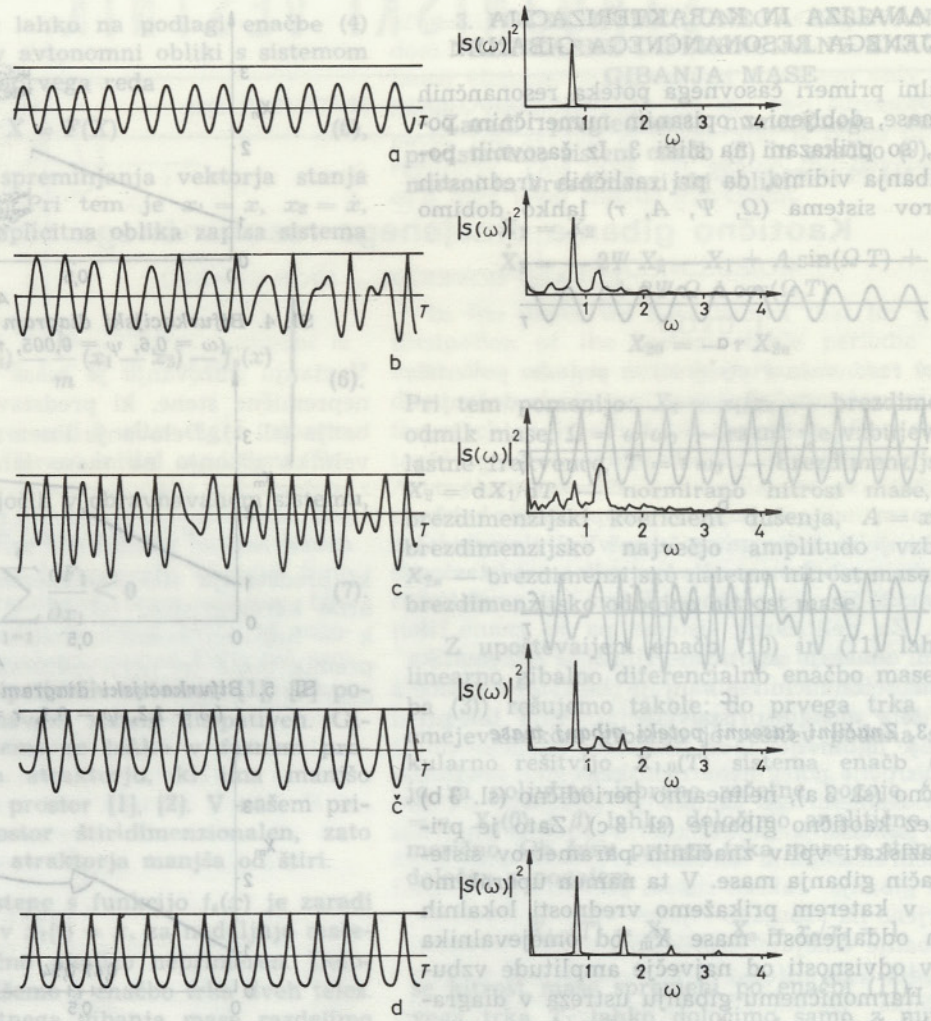


Sl. 6. *Zvezni prehod v nelinearno nihanje z dvema lokalnima največjima amplitudama*

enta dušenja Ψ postaja razlika v načinu gibanja pred in po prvem trku izrazitejša, prehod pa ostrejši [6]. V bifurkacijskem diagramu se to vidi kot nezvezna cepitev značilne krivulje v več vej. Zvezni prehod v nelinearno periodično gibanje z eno lokalno največjo amplitudo pa se ohranja [6]. Za vrednosti parametrov $\Psi = 0{,}005$, $\Omega = 0{,}8$, $r = 0{,}98$ je bifurkacijski diagram prikazan na sliki 7.



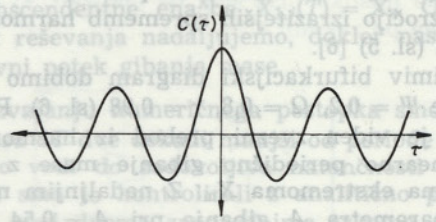
Sl. 7. *Prehod v kaotično gibanje*



Sl. 8. *Časovni signali in njihovi frekvenčni spektri za označene vrednosti parametra A na sliki 7*

Za značilne vrednosti parametra A, označene na sliki 7, so časovni posnetki gibanja mase in pripadajoči frekvenčni spektri $|S(\omega)|^2$ prikazani na sliki 8. Frekvenčni spektri so izračunani s hitro Fourierjevo transformacijo. Viden je prehod iz harmoničnega (sl. 8 a) prek navidezno-periodičnega (sl. 8 b) v kaotično gibanje mase (sl. 8 c). Za harmonično ter navidezno periodično gibanje je značilen en oziroma končno število spektralnih vrhov. Za kaotično gibanje pa je značilen širok zvezen spekter pri nizkih frekvencah, v katerem se lahko pri posameznih frekvencah še vedno pojavljajo izraziti spektralni vrhovi. Sliki 8 č in 7 d prikazujeta primera nelinearnega periodičnega nihanja, ki se pojavita pri prehodu iz kaotičnega gibanja. V našem primeru preide gibanje z dvema lokalnima ekstremoma v gibanje z enim lokalnim ekstremom. To ustreza razpolovitvi periode nihanja $4\pi/\Omega$ na $2\pi/\Omega$ oziroma združitvi dveh vej v bifurkacijskem diagramu (sl. 7). Ta prehod je kakovostno obraten tistemu, ki ga opazimo pri razvoju kaosa z logistično preslikavo [1], [2], kjer opazimo podvajanje periode in razcep krivulje v bifurkacijskem diagramu.

Prikazanemu primeru kaotičnega gibanja (sl. 8 c) ustreza avtokorelacijska funkcija $C(\tau)$ na sliki 9.



Sl. 9. *Padajoča avtokorelacijska funkcija časovnega signala, prikazanega na sliki 8 c*

Korelacijska funkcija ima dve glavni značilnosti. To sta: perioda nihanja in padanje amplitude korelacijske funkcije s časom. Perioda nihanja je posledica resonančne narave gibanja, padanje amplitude pa je posledica kaotičnega obnašanja.

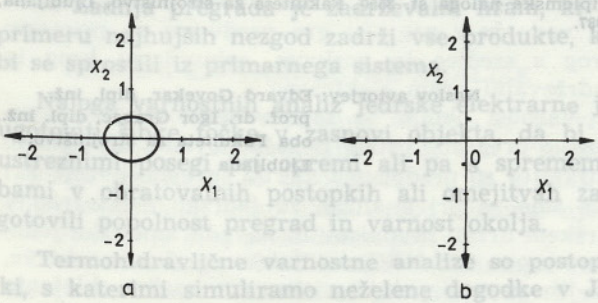
Za nadaljnji opis kaotičnega gibanja je ugodno uporabiti fazni prostor, ki ga določimo s tremi komponentami (X_1, X_2, X_3). Pri tem je X_3 normirana amplituda vzbujanja

$$X_3 = A \sin(\Omega T) \qquad (13).$$

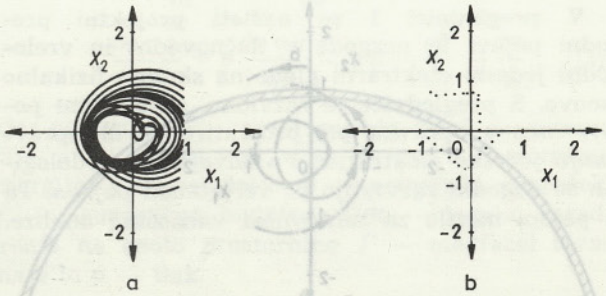
Gibanje sistema opišemo v faznem prostoru s trajektorijo, ki je definirana s časovno odvisnim vektorjem stanj

$$X(T) = (X_1(T), X_2(T), X_3(T)).$$

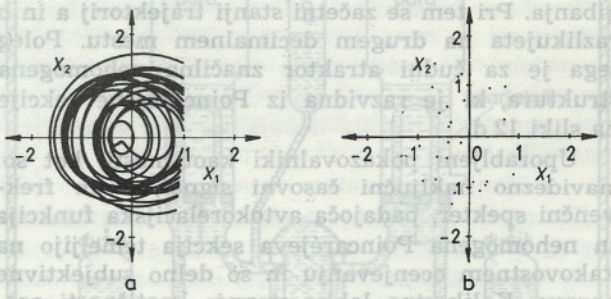
V faznem prostoru trajektorija $X(T)$ asimptotično ($T \longrightarrow \infty$) opiše geometrijsko obliko, ki se imenuje atraktor [1], [2]. Večdimenzionalni atraktor je zaradi boljše predstave primerno prikazati s projekcijami na posamezne ravnine faznega prostora. Poleg oblike imajo atraktorji za različne načine obnašanja sistema tudi različno strukturo, ki jo lahko opišemo s Poincaréjevo sekcijo [1], [2]. V našem primeru Poincaréjeva sekcija pomeni presek atraktorja z ravnino (X_1, X_2). Posamezne točke Poincaréjeve sekcije pa pomenijo mesta, kjer trajektorija gibanja $X(T)$ prebada presečno ravnino (X_1, X_2). Za časovne posnetke s slike 8 so na slikah 10—14 prikazane projekcije atraktorjev na ravnino (X_1, X_2), ter pripadajoče Poincaréjeve sekcije. S spreminjanjem kontrolnega parametra A se spreminja način gibanja, kar se kaže na lastnostih atraktorja. V faznem prostoru je atraktor harmoničnega nihanja krog (sl. 10 a). Poincaréjeva sekcija pa je predstavljena z dvema točkama (sl. 10 b). Projekcije atraktorja, ki pripada navideznemu periodičnemu gibanju mase so na sliki 11 a. Iz pripadajoče Poincaréjeve sekcije (sl. 11 b) je razvidno, da se je atraktor razširil na ploskev v prostoru. Pri atraktorju kaotičnega posnetka (sl. 12 a) vidimo iz Poincaréjeve sekcije, da se je razširil v omejeno prostornino faznega prostora (sl. 12 b). Na slikah 13 in 14 je vidno ponovno skrčenje atraktorja na krivuljo, kar ustreza periodičnemu gibanju mase. S primerjanjem Poincaréjevih sekcij na slikah 13 b in 14 b pa se vidi tudi razpolovitev periode gibanja mase m.



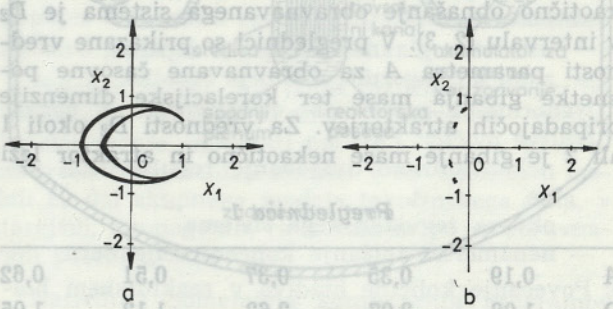
Sl. 10. *Projekcije atraktorja in Poincarejeva sekcija harmoničnega gibanja mase*



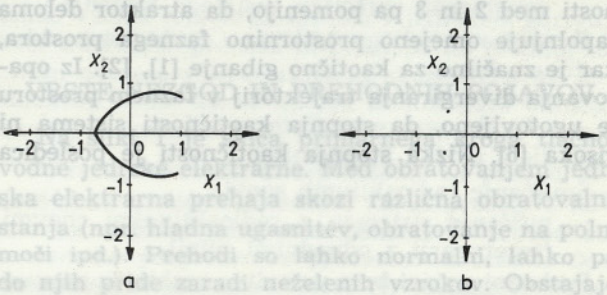
Sl. 11. *Projekcija atraktorja in Poincaréjeva sekcija navideznega periodičnega nihanja mase*



Sl. 12. *Čudni atraktor in nehomogena Poincaréjeva sekcija kaotičnega gibanja mase*

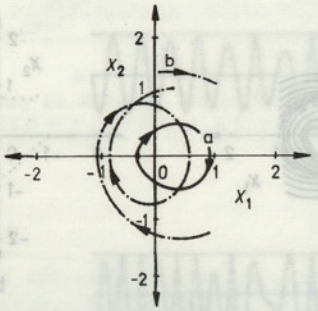


Sl. 13. *Skrčenje atraktorja na ravnino v faznem prostoru (periodično gibanje s periodo $4\pi/\omega$)*



Sl. 14. *Skrčenje atraktorja na krivuljo v faznem prostoru (periodično gibanje s periodo $2\pi/\omega$)*

Atraktor, ki pripada kaotičnemu posnetku (sl. 12), je primer čudnega atraktorja [1], [2]. Zanj je značilno, da v njem sosednje trajektorije divergirajo. To pomeni, da so občutljivo odvisne od začetnih pogojev, kar je poglavitna značilnost kaotičnega obnašanja. Na sliki 15 je prikazano stanje trajektorij po osmih trkih mase z omejevalnikom



Sl. 15. *Stanje sistema za različne začetne pogoje v času od $T = 40$ do $T = 80$*

gibanja. Pri tem se začetni stanji trajektorij a in b razlikujeta na drugem decimalnem mestu. Poleg tega je za čudni atraktor značilna nehomogena struktura, ki je razvidna iz Poincaréjeve sekcije na sliki 12 d.

Uporabljeni pokazovalniki kaotičnosti, kot so: navidezno naključni časovni signal, širok frekvenčni spekter, padajoča avtokorelacijska funkcija in nehomogena Poincaréjeva sekcija temeljijo na kakovostnem ocenjevanju in so delno subjektivne narave. Kolikostno lahko stopnjo kaotičnosti ocenimo z dimenzionalnostjo atraktorja. V ta namen uporabimo korelacijsko dimenzijo D_2 [1], [2]. Za kaotično obnašanje obravnavanega sistema je D_2 v intervalu (2, 3). V preglednici so prikazane vrednosti parametra A za obravnavane časovne posnetke gibanja mase ter korelacijske dimenzije pripadajočih atraktorjev. Za vrednosti D_2 okoli 1 ali 2 je gibanje mase nekaotično in atraktor leži

Preglednica 1

A	0,19	0,35	0,37	0,51	0,62
D_2	1,08	2,07	2,62	1,12	1,05

v faznem prostoru na krivulji ali ploskvi. Vrednosti med 2 in 3 pa pomenijo, da atraktor deloma zapolnjuje omejeno prostornino faznega prostora, kar je značilno za kaotično gibanje [1], [2]. Iz opazovanja divergiranja trajektorij v faznem prostoru je ugotovljeno, da stopnja kaotičnosti sistema ni visoka [6]. Nizka stopnja kaotičnosti je posledica vrste nelinearnosti in števila prostostnih stopenj sistema [1], [2]. Vpliv nelinearnosti v proučevanem sistemu opažamo samo v trenutku trka mase m z omejevalnikom gibanja. Med trki pa je sistem linearen in se nagiba k regularnemu gibanju, kar ne dovoljuje razvoja kaotičnega gibanja visoke stopnje.

5. SKLEP

Iz rezultatov študija enostransko omejenega resonančnega nihanja mase ugotovimo, da se pri majhnih disipativnostih sistema masa lahko giblje kaotično. Pri večjih disipativnostih sistema pa navzočnost trkov ne povzroči večjih sprememb harmonskega gibanja.

V strojništvu se pogosto srečujemo z nelinearnimi resonančnimi sistemi. Zato želimo s tem prispevkom opozoriti, da je pojav kaotičnega obnašanja lahko neposredna posledica nelinearne dinamike determinističnega sistema in ne le naključno delujočih vplivov. Obdelani primer pa kaže, da je mogoče kaotično obnašanje, ki je posledica dinamike sistema, s primerno izbiro parametrov tudi preprečiti.

Iz drugega poglavja je razvidno, da bi za rešitev v sklenjeni obliki potrebovali niz začetnih pogojev oziroma čase T_j, v katerih se pojavljajo trki mase z omejevalnikom. Raziskati bi bilo treba, ali obstaja povezava med zaporednimi hitrostmi, s katerimi masa trči v omejevalnik v obliki $X_{2n(j+1)} = g(\Delta T_j, X_{2nj})$, $\Delta T_{j+1} = h(\Delta T_j, X_{2nj})$, kjer je $\Delta T_j = T_j - T_{j-1}$. Nadaljnji študij bo zato potekal na tem področju.

LITERATURA

[1] I. Grabec: Deterministični kaos, SV 1988/4—6, str. 37—43.
[2] H. G. Schuster: Deterministic Chaos, An Introduction, Physik Verlag, Weinheim, 1984.
[4] S. W. Shaw, P. J. Holmes: A Periodically Forced Piecewise Linear Oscillator, Journal of Sound and Vibration, Vol. 90, 1983, str. 129—155.
A Periodically Forced Oscillator With Large Dissipation, Journal of Applied Mechanics, Vol. 50, 1983, str. 849—857.
Periodically Forced Linear Oscillator with Impacts: Chaos and Long-Period Motions, Physical Review Letters, Vol. 51, Nr. 8, 1983, str. 623—626.
[5] J. M. T. Thompson, R. Ghaffari: Chaos After Period-Doubling Bifurcations in the Resonance of an Impact Oscillator, Vol. 91A, Nr. 1, 1982, str. 5—8.
[4] Z. Bohte: Numerične metode, DZS, Ljubljana, 1978.
[5] E. Govekar: Študij nelinearnega resonančnega nihanja, Diplomska naloga št. 3550, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 1987.

Naslov avtorjev: Edvard Govekar, dipl. inž.,
prof. dr. Igor Grabec, dipl. inž.,
oba Fakulteta za strojništvo,
Ljubljana