

STROJNJIŠKI VESTNIK

MECHANICAL ENGINEERING JOURNAL

LETNIK 38
VOLUME 38

LJUBLJANA. JANUAR—MAREC
JANUARY—MARCH

ŠTEVILKA 1—3
NUMBER 1—3

UDK 66.063.8

Porazdelitvene funkcije za velikost kapljic in trdnih delcev pri razprševanju fluidov in drugih materialov

Droplet and Particle Size Distribution Functions for Atomization of Fluids and other Materials

IVO BAJSIĆ — BOGDAN BLAGOJEVIĆ — BOGOMIL PERTOT

O. UVOD

Pomembni tehnološki postopki, ki se uporabljajo v različnih vejah industrije, posebno pa v procesni tehniki, so povezani z razprševanjem kapljic ali trdnih delcev. Za matematično modeliranje takšnih transportnih procesov moramo poznati ustrezno porazdelitev velikosti kapljic oziroma delcev. Z razvojem sodobnih brezdotikalnih optičnih merilnih metod PDA (Particle Dynamic Analyzer) in PDPA (Phase Doppler Particle Analyzer) so se pojavile velike možnosti eksperimentalnega določanja porazdelitve velikosti trdnih ali tekočih delcev (kapljic). Želja mnogih raziskovalcev je, da bi lahko eksperimentalne izmerke velikosti trdnih delcev ali kapljic opisali z enako porazdelitveno funkcijo. V tem prispevku so analizirane tri porazdelitvene funkcije za popis porazdelitve velikosti kapljic, in sicer: tri- in štiriparametrična logaritemsko hiperbolična porazdelitvena funkcija (v nadaljevanju LHPD-3p in LHPD-4p) ter modificirana eksponentna porazdelitvena funkcija (v nadaljevanju MEXP). Te funkcije, ki so nelinearne in večparametrične, omogočajo analitičen opis eksperimentalnih izmerkov velikosti delcev. Parametre teh funkcij smo določili po metodi najmanjših kvadratov, prirejeni za nelinearne sisteme enačb. Kot zadovoljive aproksimacije za opis lastnih eksperimentalnih izmerkov in razpoložljivih izmerkov drugih avtorjev se je pokazalo, da so tri porazdelitvene funkcije enakovredne.

Pričujoč prispevek je dopolnitev objave [8].

O. INTRODUCTION

Atomization of fluids into tiny droplets or other materials into particles is a very important industrial technological process. Corresponding droplets size distribution or particle size distribution must be known mathematical modelling of transport phenomena.

The new optical measurement methods and systems PDA (Particle Dynamic Analyzer) and PDPA (Phase Doppler Particle Analyzer) offer many possibilities of determining droplet or particle size distributions. The aim of much research is to obtain a general distribution function which has a suitable agreement. Three distribution functions are presented in this paper: A four parameter logarithmic hyperbolic distribution LHPD-4p, a three parameter logarithmic hyperbolic distribution LHPD-3p and the modified exponential distribution MEXP. These nonlinear functions have parameters which can be determined numerically by the least square method and adapted for systems of non-linear equation. The experimental particle and droplet size distributions are in good agreement by these functions.

All of these functions are proved to have a satisfactory relationship with experimental and analytical results on the basis of our own experimental results and the results of other researchers. This paper presents the continuation of a study by the authors presented in an earlier paper [1].

1. TEORETIČNA IZHODIŠČA

V nadaljevanju bomo nadrobneje predstavili logaritemski hiperbolični funkciji s štirimi parametri LHPD-4p in tremi parametri LHPD-3p ter modificirano eksponentno porazdelitveno funkcijo MEXP. Gostota verjetnosti prostorninske ali številsko porazdelitve delcev velikosti x je definirana:

$$f_v(x) = \frac{dv}{dx}, \quad f_n(x) = \frac{dv}{dx} \quad (1).$$

1.1. Logaritemski hiperbolična porazdelitev LHPD-4p

Upraba funkcije gostote logaritemsko hiperbolične porazdelitve se je razširila šele konec osemdesetih let [2], [3].

Zgodovina nastajanja in osnovne lastnosti LHPD-4p so strnjeno zapisane v [4], [5] in [6]. Mnogi avtorji so proučevali funkcije, ki bi se s pravilno izbiro prostih parametrov čim bolj ujemale z izmerki velikosti kapljic ali trdih delcev. Zelo pomembno delo so opravili Bagnold [3], Barndorff-Nielsen [2] ter Blaesild [4]. Bagnold je proučeval porazdelitev velikosti naravno vsedih prašnih delcev. Izmerke je vrisal v diagram z logaritemsko mrežo. Geometrično mesto točk je dalo hiperbolo, ki je grafično izražena funkcija gostote porazdelitve.

$$f(x) = a(\alpha, \beta, \delta) \exp\left[-\alpha\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2} + \beta(x-\mu)\right] \quad (2),$$

kjer so $\alpha > 0$, $|\beta| < \alpha$, $\delta > 0$ in $-\infty < \mu < \infty$ štirje parametri, [4], a pa je normirna konstanta. Iz pogoja $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ izhaja:

$$a(\alpha, \beta, \delta) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{1/2}}{2\alpha\delta K_1(\delta(\alpha^2 - \beta^2)^{1/2})} \quad (3),$$

kjer je $K_1(\delta(\alpha^2 - \beta^2)^{1/2})$ modificirana Besselova funkcija tretje vrste in prvega reda. Parametri funkcije imajo tudi svojo geometrijsko razlaglo: μ je enak abscisi, $\ln(a)$ pa ordinati presečišča asymptot. Neklonska koeficiente leve in desne asymptote pa sta enaka $\Phi = \alpha + \beta$ in $\gamma = -(\alpha - \beta)$.

Hiperbola ima maksimum v točki s koordinatama:

1. THEORETICAL CONSIDERATION

LHPD-4p, LHPD-3p and MEXP distribution functions will be presented in this section. The probability densities of volumetric distribution function $f_v(x)$ and number distribution function $f_n(x)$ of droplets and particles size x is defined by:

$$f_v(x) = \frac{dv}{dx}, \quad f_n(x) = \frac{dv}{dx} \quad (1).$$

1.1 Logarithmic hyperbolic distribution LHPD-4p

The logarithmic hyperbolic probability density function are has become very popular during the last decade [2], [3]. The detail evolution and the basic properties of the LHPD-4p are described in [4], [5], [6]. Many authors studied functions whose parameters give analytical results with the minimum deviation between experimental and analytical values. The most important work was done by Bagnold [3], Barndorff-Nielsen [2] and Blaesild [4]. Bagnold studied the distribution of wind blown sand and desert dunes. He presented experimental values in a logarithmic values in a logarithmic diagram. He derived a probability density function whose curve in the logarithmic diagram is a hyperbola.

The probability density function for the onedimensional hyperbolic distribution proposed by Barndorf-Nielsen is

where $\alpha > 0$, $|\beta| < \alpha$, $\delta > 0$ and $-\infty < \mu < \infty$ are the four parameters to be fitted, [4] and a is norming parameter. From the condition $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ follows.

where $K_1(\delta(\alpha^2 - \beta^2)^{1/2})$ is the modified Bessel function of the third kind and the first order. The parameters have geometrical meaning: μ is the abscissa of the intersection asymptotes, $\ln(a)$ is the ordinate of the asymptotes intersection. The slopes of the left and right hand asymptotes are respectively $\Phi = \alpha + \beta$ and $\gamma = -(\alpha - \beta)$. The hyperbola has its maximum at the point with coordinates:

$$\mu_0 = \mu + \frac{\delta\beta}{(\alpha^2 - \beta^2)^{1/2}} \quad (4)$$

$$p_m = a \exp(-\delta(\alpha^2 - \beta^2)^{1/2}) \quad (5)$$

Parameter merila δ , ki nima geometrijske razlage, se lahko izračuna iz:

The scale parameter δ can be calculated from

$$\delta = \frac{\ln a - p_m}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \quad (6)$$

Polmer ukrivljenosti v točki maksimuma pa je enak:

The radius of curvature is given by

$$r = \frac{\alpha^2 \delta}{\sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)^3}} \quad (7)$$

Enačbo (2) lahko zapišemo tudi kot:

Equation (2) can be written as

$$f(x) = \exp[-\alpha\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} + \beta(x - \mu) + \nu] \quad (8)$$

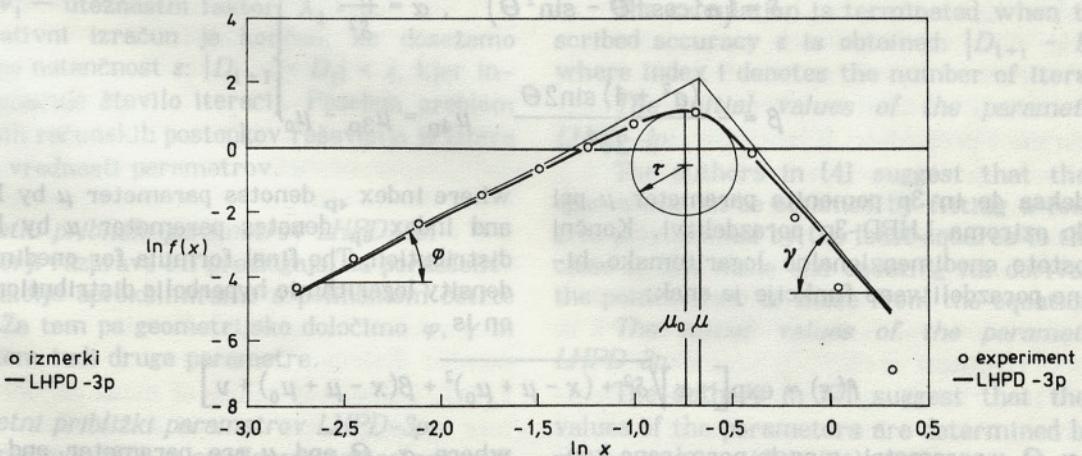
kjer je $\nu = \ln a$. V mnogih primerih, zaradi bolj nazorne ponazoritve rezultatov v logaritemskem diagramu, navadno uporabljamo naslednji zapis funkcije gostote porazdelitve LHPD-4p [3]:

where is $\nu = \ln a$. In many cases a particle or droplet size x is replaced by $\ln x$ [3]:

$$f(x) = \exp[-\alpha\sqrt{\delta^2 + (\ln x - \mu)^2} + \beta(\ln x - \mu) + \nu] \quad (9)$$

LHPD-4p je prikazana na sliki 1.

LHPD-4p is shown in fig. 1.



Sl. 1. Verjetnostna funkcija LHPD.

Fig. 1. The probability function LHPD

1.2 Logaritemska hiperbolična porazdelitev LHPD-3p

Funkcija gostote verjetnosti LHPD-3p je poseben primer bolj splošne funkcije gostote logaritemsko hiperbolične porazdelitve LHPD-4p s štirimi parametri. Osnovne značilnosti LHPD-3p so podane v literaturi [7], po kateri povzemanamo naslednje značilnosti.

V enačbi hiperbole $Y^2/b^2 - X^2/a^2 = 1$ postavimo vrednost parametra $b = 1$ in dobimo:

$$Y = -\sqrt{1 + \frac{X^2}{a^2}} \quad (10),$$

kjer je a normirana konstanta. Z rotacijo koordinat za kot Θ dobimo nov koordinatni sistem, ki se z nerotiranim izraža takole:

$$X = x \cos \Theta - y \sin \Theta \quad (11),$$

$$Y = x \sin \Theta + y \cos \Theta \quad (12),$$

kjer sta x in y novi koordinatni osi. Z upoštevanjem enačb (10), (11) in (12) dobimo:

$$y = -\frac{a}{a^2 \cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta} \sqrt{a^2 \cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta + x^2} - \frac{(a^2 + 1) \sin 2\Theta}{2(a^2 \cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta)} \quad (13).$$

Abscisa vrha hiperbole je:

$$\mu_0 = \frac{(a^2 + 1) \sin 2\Theta}{2 \sqrt{\frac{a^2 - (a^2 + 1)^2 \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta}{a^2 \cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta}}} \quad (14).$$

LHPD-3p lahko izrazimo s podobnim zapisom kakor LHPD-4p, če upoštevamo:

$$\left. \begin{aligned} \delta &= (a^2 \cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta)^{1/2}, \quad \alpha = \frac{a}{\delta^2} \\ \beta &= -\frac{(a^2 + 1) \sin 2\Theta}{2\delta^2}, \quad \mu_{4p} = \mu_{3p} - \mu_0 \end{aligned} \right\} \quad (15),$$

kjer indeksa 4p in 3p pomenita parameter μ pri LHPD-4p oziroma LHPD-3p porazdelitvi. Končni zapis gostote enodimensionalne logaritemsko hiperbolične porazdelitvene funkcije je enak:

$$f(x) = \exp \left[-\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu + \mu_0)^2} + \beta(x - \mu + \mu_0) + \nu \right] \quad (16),$$

kjer so α , Θ , μ parametri, ν pa je normirana konstanta. V enačbi (16) lahko spremenljivko x zamenjamo z $\ln x$.

1.2 Logarithmic hyperbolic distribution LHPD-3p

Probability density function LHPD-3p is a special case of the general logarithmic hyperbolic distribution LHPD-4p with four parameters. The basic properties are described in [7] from which the following can be summarized: A hyperbola is given in its general form as

where a is a normalization constant and b can take the value 1. Then a rotation of the coordinates by the angle Θ is introduced:

where x and y are the new coordinate axis. Combining equations (10), (11) and (12) results in:

The abscissa of the vertex of the hyperbola is given by

LHPD-3p is related to the four parameter distribution LHPD-4p by the following relationships:

where index _{4p} denotes parameter μ by LHPD-4p and index _{3p} denotes parameter μ by LHPD-3p distribution. The final formula for onedimensional density logarithmic hyperbolic distribution function is

where α , Θ and μ are parameter and ν is the normalisation constant. In equation (16) a variable x can be replaced with $\ln x$.

1.3 Modificirana eksponentna porazdelitev MEXP

Modificirana eksponentna porazdelitvena funkcija je podana in že opisana v [1] in [8]. Gostota porazdelitve je podana s funkcijo:

$$f(x) = ax^b \exp^{-cx} \quad (17),$$

kjer so $a, b, c > 0$. Funkcija ima ekstrem pri $x = b/c$.

2. NUMERIČNO REŠEVANJE

Obravnavane porazdelitvene funkcije so nelinearne in štiri- oziroma triparametrične. Vrednosti prostih parametrov moramo izbrati tako, da bo vsota kvadratov odstopkov med posamezno porazdelitveno funkcijo in izmerki minimalna. Funkcijo pogreškov v statističnem pomenu definiramo z vsoto kvadratov odstopkov:

$$D(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_i)]^2 \quad (18),$$

kjer je x_i velikost premera delčkov ali kapljic, $f(x_i)$ izmerjena vrednost gostote porazdelitve, $f(x)$ aproksimirana vrednost gostote porazdelitve, funkcijo pogreškov D pa je odvisna od parametrov a_j . Za izračun parametrov smo v vseh treh primerih uporabili Newtonovo gradientno metodo:

$$\frac{\partial D}{\partial a_j} = -\lambda_j \sum_{i=1}^n w_i [f(x_i) - f(x_i)]^2 \frac{\partial f}{\partial a_j} = 0 \quad (19),$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, m$$

kjer je w_i – utežnostni faktor, $\lambda_j > 0$.

Iterativni izračun je končan, ko dosežemo predpisano natančnost ε : $|D_{i+1} - D_i| < \varepsilon$, kjer indeks i označuje število iteracij. Poseben problem iterativnih računskih postopkov reševanja je izbiro začetnih vrednosti parametrov.

Začetni približki parametrov LHPD-4p:

Avtorji razprave [4] predlagajo, da porazdelitveno funkcijo aproksimiramo s polinomom četrte stopnje. Za tem pa geometrijsko določimo φ, γ in μ ter s tem tudi druge parametre.

Začetni približki parametrov LHPD-3p:

V prispevku [7] je predlagana izbiro začetnih parametrov tako, kakor je nazorno prikazano tudi na sliki 2:

1.3 Modified exponential distribution MEXP

The modified exponential distribution function is described in the literature [1] and [8]. The density distribution is given by the function:

$$f(x) = ax^b \exp^{-cx} \quad (17),$$

where $a, b, c > 0$. This function (17) attains the maximum value at $x = b/c$.

2. NUMERICAL SOLUTION

The distribution functions are nonlinear and have three or four parameters. The values of the parameters must fit experimental droplet or particle size distributions. The aggregate squared error D is defined by

where D depends upon the parameters a_j , x_i is the particle or droplet diameter, $f(x_i)$ is the measured value and $f(x)$ is the approximation function. It is required that the value of the aggregate squared error has a minimum. Numerical values of the parameters were obtained by the least square method with the Newton gradient method:

$$\frac{\partial D}{\partial a_j} = -\lambda_j \sum_{i=1}^n w_i [f(x_i) - f(x_i)]^2 \frac{\partial f}{\partial a_j} = 0 \quad (19),$$

where w_i is the weighting factor and $\lambda_j > 0$.

The calculation is terminated when the prescribed accuracy ε is obtained: $|D_{i+1} - D_i| < \varepsilon$, where index i denotes the number of iteration.

The initial values of the parameters for LHPD-4p:

The authors in [4] suggest that the initial approximation be obtained by fitting a fourth degree polynomial by the least squares to the points close to the mode and equating its derivatives at the points close to those from the equation.

The initial values of the parameters for LHPD-3p:

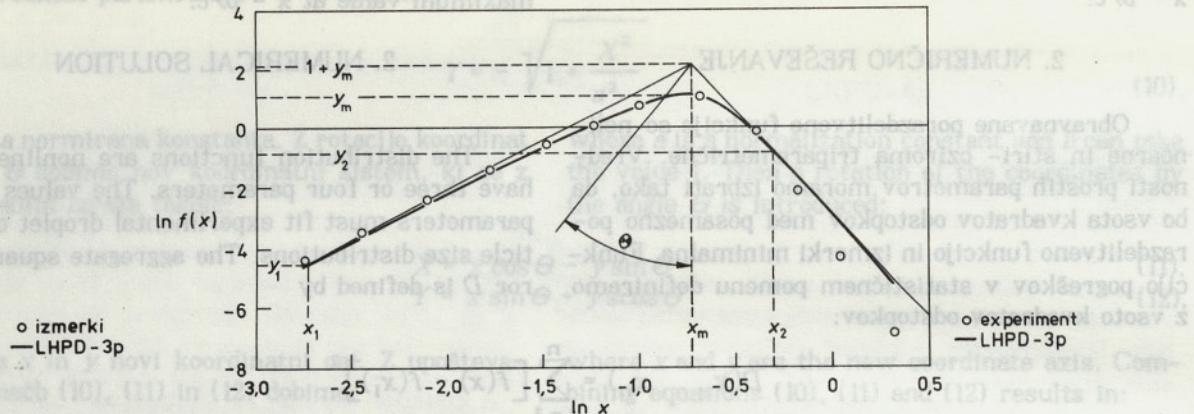
The authors in [7] suggest that the initial values of the parameters are determined by following equations (20), (21), (23).

The parameters can be roughly estimated directly by referring to fig. 2.

$$a_0 = \tan \left[0,5 \arctan \frac{x_m - x_1}{1 + y_m - y_1} + 0,5 \arctan \frac{x_2 - x_m}{1 + y_m - y_1} \right] \quad (20)$$

$$\Theta_0 = 0,5 \left[\arctan \frac{x_m - x_1}{1 + y_m - y_1} - \arctan \frac{x_2 - x_m}{1 + y_m - y_1} \right] \quad (21)$$

$$\mu_0 = x_m \quad (22)$$



Sl. 2. Izbera začetnih vrednosti parametrov LHPD-3p.

Fig. 2. The initial values of the parameters for LHPD-3p

Začetni približki parametrov MEXP:

Med izmerki izberemo tri najbolj reprezentativne točke, skozi katere narišemo krivuljo. Začetne vrednosti parametrov a , b , c lahko določimo preprosteje kakor pa v primeru porazdelitve LHPD.

Ta postopek je zelo primeren tudi za druge porazdelitvene funkcije, kadar imamo premalo število eksperimentalnih izmerkov ali pa v primeru večmodalne vzorčne porazdelitve.

3. PRIMERJAVA RAZLIČNIH PORAZDELITVENIH FUNKCIJ

Opisani algoritem smo najprej testirali za LHPD-4p, kjer smo uporabili eksperimentalne izmerke, zbrane v delu Bhatie in Dursta. Vrednosti izračunanih parametrov porazdelitvene funkcije so zbrane v preglednici 1. Izračunane vrednosti po metodi avtorjev tega prispevka so označene z *, za primerjavo pa so zbrane tudi vrednosti Bhatie in Dursta [5]. Dobljeni rezultati se nanašajo na številsko porazdelitveno funkcijo velikosti delcev $f_n(x)$, kjer se naključna spremenljivka x ni izražala z logaritmom, enačba (13). V preglednici 2 so izračunane vrednosti srednjih premerov eksperimentalnih izmerkov in aproksimiranih porazdelitvenih funkcij trdnih delcev ter vrednosti funkcije pogreškov D . Preglednici 1 in 2 prikazujeta dobro ujemanje med izmerki in aproksimiranimi vrednostmi. Rezultati so prikazani na sliki 3.

The initial values of the parameters for MEXP:

The three representative experimental values are selected from experimental droplet or particle size distribution. It is much easier to establish an initial value for a , b , c in comparison with LHPD distribution.

This procedure is also applicable to the other distribution functions, especially when there is not enough experimental data.

3. COMPARISON OF DISTRIBUTION FUNCTIONS

The described algorithm was first tested on LHPD-4p and data for this distribution were taken from Bhatia and Durst. Calculated parameters of the distribution functions are shown in table 1. Our computation is assigned with an asteric. The values of Bhatia and Durst [5] are also shown for comparison in table 1. Results are referred to number distribution function of the particle size $f_n(x)$. Calculated values of mean particle diameters and aggregate squared error D are given in table 2. Results are shown in fig. 3. The values in table 2 and 3 have a satisfactory relationship between experimental and analytical values.

Preglednica 1: Vrednosti parametrov številske porazdelitvene funkcije trdnih delcev [5].

Table 1. Parameters of number particle size distribution functions [5].

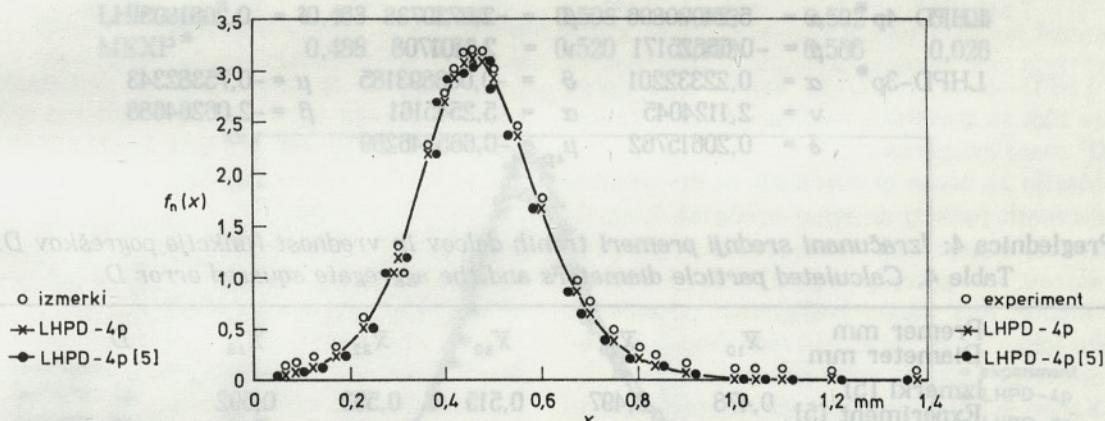
Parametri porazdelitve — Parameters of distribution

LHPD-4p *	$\alpha = 14,3922916$	$\beta = 1,574632$	$\delta = 0,1728722$
	$\mu = 0,44272683$	$\nu = 3,6095802$	
LHPD-4p	$\alpha = 14,426424$	$\beta = 1,570784$	$\delta = 0,177148$
	$\mu = 0,442536$	$\nu = 3,687014$	

Preglednica 2: Izračunani srednji premeri trdnih delcev in vrednost funkcije pogreškov D.

Table 2. Calculated mean particle diameters and the aggregate squared error D.

Premer mm Diameter mm	\bar{x}_{10}	\bar{x}_{20}	\bar{x}_{30}	\bar{x}_{32}	\bar{x}_{43}	D
Izmerki [5]	0,478	0,497	0,515	0,553	0,592	
Experiment						
LHPD-4p *	0,476	0,496	0,515	0,555	0,594	0,012
LHPD-4p	0,476	0,496	0,515	0,555	0,594	0,014
Bhatia - Durst						

Sl. 3. Številska porazdelitvena funkcija $f_n(x)$ za velikost trdnih delcev x [5].Fig. 3. The number particle size distribution functions $f_n(x)$ for particle x, [5].

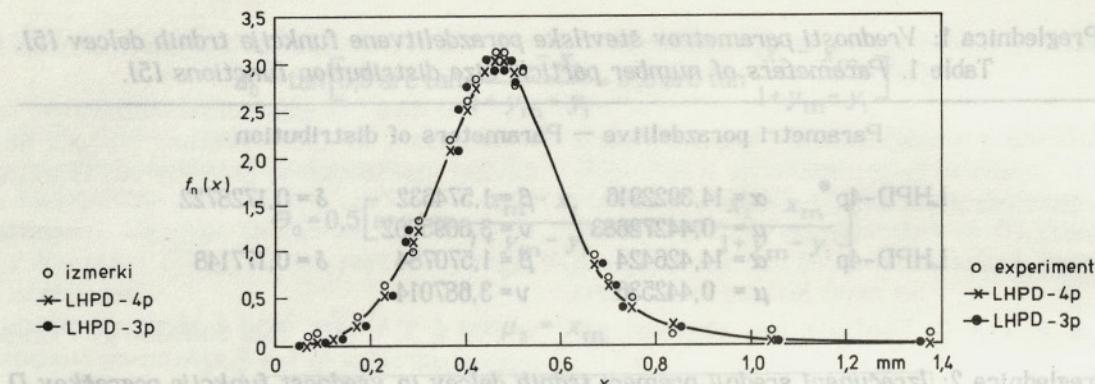
Algoritem smo testirali tudi za primer LHPD-3p, kjer se je naključna spremenljivka pojavljala kot $\ln x$. V preglednicah 3 in 4 so prikazane izračunane vrednosti parametrov porazdelitvenih funkcij, srednjih premerov trdnih delcev in funkcije pogreška D za iste izmerke po [5]. Rezultati so prikazani na sliki 4.

V procesnih napravah nas po navadi bolj zanima prostorninski delež. Prostorninski delež razpršenih delcev $\Delta v_i / \sum v_i$ se lahko izraža s številskim deležem $\Delta n_i / \sum n_i$ [9] kakor prikazuje naslednja formula:

The algorithm was also tested for LHPD-3p, where the random variable (particle size) is expressed as $\ln x$. Calculated parameters of the number particle size distribution function, values of the mean diameters and the aggregate squared error D, are shown in table 3 and table 4 for the experimental data [5]. All results are also presented in fig. 4.

The volumetric distribution of the particles or droplet size is more interesting in the technological processes than in the number distribution. The relation between the frequency of the droplet or particle number $\Delta n_i / \sum n_i$ and their volumetric portion $\Delta v_i / \sum v_i$ is given by

$$v(x_i) = \frac{\Delta v(x_i)}{\sum_{i=1}^n \Delta v(x_i)} = \frac{\Delta n(x_i) [0,5(x_{i1} + x_{i2})]^3}{\sum_{i=1}^n [0,5(x_{i1} + x_{i2})]^3 \Delta n(x_i)} \quad (23).$$



Sl. 4. Primerjava številskeih porazdelitvenih funkcij $f_n(x)$ za velikost trdnih delcev x [5]
Fig. 4. Comparision of the number particle size distribution functions $f_n(x)$ for particle size x [5].

Preglednica 3: Vrednosti parametrov številskeih porazdelitvenih funkcij trdnih delcev, upoštevajoč izmerke po [5].

Table 3. Parameters of number particle size distribution functions [5].

LHPD-4p*	$\alpha = 5,24970896$	$\beta = -2,0730738$	$\delta = 0,2061893$
	$\mu = -0,66625171$	$\nu = 2,1101708$	
LHPD-3p*	$\alpha = 0,22332201$	$\vartheta = -0,083893185$	$\mu = -0,75382343$
	$\nu = 2,1124045$	$\alpha = 5,2545161$	$\beta = -2,06264688$
	$\delta = 0,20615762$	$\mu_{4p} = -0,665846289$	

Preglednica 4: Izračunani srednji premeri trdnih delcev in vrednost funkcije pogreškov D.
Table 4. Calculated particle diameters and the aggregate squared error D.

Premer mm Diameter mm	\bar{x}_{10}	\bar{x}_{20}	\bar{x}_{30}	\bar{x}_{32}	\bar{x}_{43}	D
Izmerki [5]						
Experiment [5]	0,478	0,497	0,515	0,553	0,592	
LHPD-4p*	0,483	0,507	0,531	0,583	0,642	0,016
LHPD-3p*	0,484	0,507	0,532	0,584	0,643	0,016

V preglednicah 5 in 6 so zbrane številske vrednosti parametrov, srednji premeri in vrednosti funkcije pogreškov D za prostorninsko porazdelitev trdnih delcev, kjer smo primerjali MEXP, LHPD-4p in LHPD-3p. Rezultati so prikazani na sliki 5.

Porazdelitvene funkcije smo testirali tudi za eksperimentalne izmerke velikosti kapljic. Narejene modele in numerične postopke smo testirali za primer lastnih eksperimentalnih izmerkov [1], [8]. Izračunane vrednosti so zbrane v preglednicah 7 in 8 ter prikazane na sliki 6.

Iz dobljenih vrednosti, ki so zbrane v preglednicah 1–8 ter prikazane na slikah 3–6, ugotavljamo:

– Funkcije LHPD-4p, LHPD-3p in MEXP izpolnjujejo vse kriterije, da jih lahko uporabimo kot porazdelitvene funkcije [9], [1]. Vse tri funkcije so primerne za opis eksperimentalnih izmerkov prostorninskih deležev velikosti kapljic in trdnih delcev.

where $v(x_i)$ is the volumetric frequency of the particle and droplet size. Numerical values of the parameter distribution, values of the mean diameters and the aggregate squared error D for the volumetric distribution of the particle size are collected in table 5 and 6. In tables 5, 6 and fig. 5, a comparision between MEXP, LHPD-4p and LHPD-3p is made.

Distribution function were also tested for our own experimental results for droplet size [1], [8]. Calculated values are presented in tables 7 and 8 and shown in fig. 6.

From the values in the tables 1–8 and fig. 3–6 we conclude that:

– The functions LHPD-4p, LHPD-3 and MEXP satisfy all criteria for distribution functions, as listed in [9], [1]. They are suitable for describing experimental results of the particle or droplet size distribution.

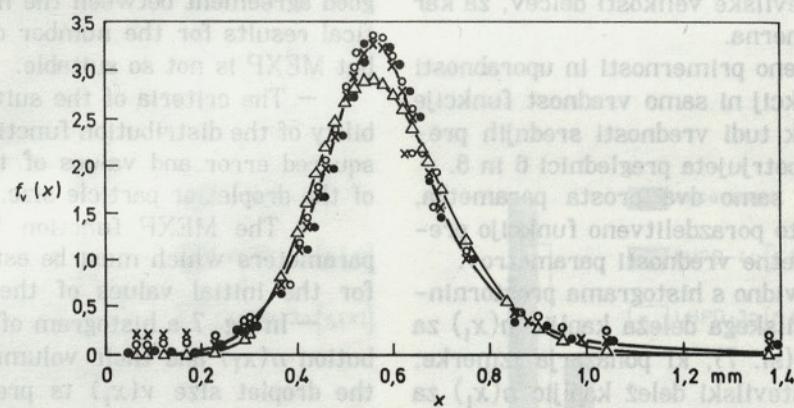
Preglednica 5: Vrednosti parametrov prostorninskih porazdelitvenih funkcij trdnih delcev [5].
Table 5. Parameters of volumetric particle size distribution functions [5].

Parametri porazdelitve — Parameters of distribution

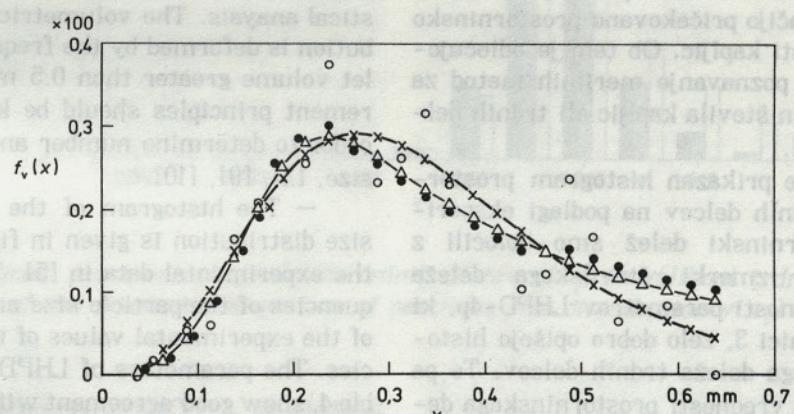
LHPD-4p*	$\alpha = 6,18318$	$\beta = -1,20306$	$\delta = 0,16479$
	$\mu = -0,5397$	$\nu = 2,186099$	
LHPD-3p*	$\alpha = 0,16791793$	$\Theta = 0,031797373$	$\mu = -0,572427837$
	$\nu = 2,186455$	$\alpha = 6,18318256$	$\beta = -1,20310663$
	$\delta = 0,16479442$	$\mu_{4p} = -0,5397313$	
MEXP*	$a = 0,1624 \cdot 10^{13}$	$b = 16,9926$	$c = 30,71186$

Preglednica 6: Izračunani srednji premeri trdnih delcev in vrednost funkcije pogreškov D.
Table 6. Calculated mean particle diameters and the aggregate squared error D.

Premer mm Diameter mm	\bar{x}_0	\bar{x}_{20}	\bar{x}_{30}	\bar{x}_{32}	\bar{x}_{43}	D
Izmerki [5]						
Experiment [5]	0,478	0,497	0,515	0,553	0,592	
LHPD-4p*	0,463	0,487	0,508	0,553	0,592	0,004
LHPD-3p*	0,463	0,486	0,508	0,553	0,592	0,004
MEXP*	0,488	0,504	0,520	0,553	0,586	0,026



Sl. 5. Primerjava prostorninskih porazdelitvenih funkcij $f_v(x)$ za velikost trdnih delcev x [5].
Fig. 5. Comparision of the volumetric particle size distribution functions $f_v(x)$ for particle size x [5].



Sl. 6. Primerjava prostorninskih porazdelitvenih funkcij $f_v(x)$ za velikost kapljic x [1], [8].
Fig. 6. Comparision of the volumetric droplet size distribution functions $f_v(x)$ for droplet size x [1], [8].

Preglednica 7: Vrednosti parametrov prostorninskih porazdelitvenih funkcij kapljic [1]
 Table 7. Parameters of volumetric droplet size distribution functions, [1], [8].

Parametri porazdelitve – Parameters of distribution

LHPD-4p *	$\alpha = 2,40380227$	$\beta = 0,649268$	$\delta = 0,429443550$
	$\mu = 5,3377037$	$\nu = -0,24656439$	
LHPD-3p *	$\alpha = 0,443331742$	$\Theta = -0,1007562288$	$\mu = 5,458208532$
	$\nu = -0,24660863$	$\alpha = 2,40370290$	$\beta = -0,64924549$
	$\delta = 0,42946129$	$\mu_{4p} = 5,337732177$	
MEXP *	$a = 0,153 \cdot 10^{-9}$	$b = 3,6541$	$c = 0,0137$

Preglednica 8: Izračunani srednji premeri kapljic in vrednosti funkcije pogreškov D.
 Table 8. Calculated mean particle diameters and the aggregate squared error D.

Premer mm Diameter mm	\bar{X}_{10}	\bar{X}_{20}	\bar{X}_{30}	\bar{X}_{32}	\bar{X}_{43}	D
Izmerki [1]						
Experiment [1], [8]	154	179	204	267	325	
LHPD-4p *	150	175	202	268	332	0,048
LHPD-3p *	150	175	202	268	332	0,048
MEXP *	140	166	192	260	320	0,043

– LHPD-4p in LHPD-3p dajeta zelo dobre rezultate tudi za številske velikosti delcev, za kar je MEXP manj primerna.

– Merilo za oceno primernosti in uporabnosti porazdelitvenih funkcij ni samo vrednost funkcije pogreškov D, ampak tudi vrednosti srednjih premerov delcev, kar potrjujeta preglednici 6 in 8.

– MEXP ima samo dva prosta parametra, prav tako lahko za to porazdelitveno funkcijo preprosto določimo začetne vrednosti parametrov.

– Kakor je razvidno s histograma prostorninskega deleža kapljic $v(x_1)$ in številskega deleža kapljic $n(x_1)$ za velikost kapljic x_1 (sl. 7), ki ponazarja izmerke, povzete po [1], je številski delež kapljic $n(x_1)$ za kapljice, večje od 0,5 mm, zanemarljivo majhen. Deleže kapljic, ki so večje od 0,5 mm, bi morali ob statistični analizi izmerkov pravzaprav zanemariti, saj zelo popačilo pričakovano prostorninsko porazdelitev velikosti kapljic. Ob tem je odločajočega pomena dobro poznavanje merilnih metod za določanje velikosti in števila kapljic ali trdnih delcev [2], [9] ter [10].

– Na sliki 8 je prikazan histogram prostorninskega deleža trdnih delcev na podlagi eksperimenta [5]. Prostorninski delež smo določili z eksperimentalnimi izmerki številskega deleža trdnih delcev. Vrednosti parametrov LHPD-4p, ki so zbrani v preglednici 3, zelo dobro opisujejo histogram prostorninskega deleža trdnih delcev. To pa ne bi mogli trditi za vrednosti prostorninskega deleža trdnih delcev, ki bi ga dobili, če bi izračunali prostorninski delež trdnih delcev po enačbi (23) in uporabili parametre številske porazdelitvene funkcije LHPD-4p (pregl. 3).

– LHPD-4p and LHPD-3p distribution give good agreement between the measured and analytical results for the number density distribution, but MEXP is not so suitable.

– The criteria of the suitability and applicability of the distribution function are the aggregate squared error and values of the mean diameters of the droplet or particle size.

– The MEXP function has only two free parameters which must be estimated, easily done for the initial values of the parameters.

– In fig. 7 a histogram of the number distribution $n(x_1)$ and their volumetric distribution of the droplet size $v(x_1)$ is presented. The histograms were obtained from our own experimental data [1]. The frequency of the droplet volume, greater than 0.5 mm, must be neglected in statistical analysis. The volumetric droplet size distribution is deformed by the frequencies of the droplet volume greater than 0.5 mm. So, the measurement principles should be known very well in order to determine number and droplet or particle size, [2], [9], [10].

– The histogram of the volumetric particle size distribution is given in fig. 8 on the basis of the experimental data in [5]. The volumetric frequencies of the particle size are established by aid of the experimental values of the number frequencies. The parameters of LHPD-4p, as given in table 4, show good agreement with measured results. But this is not true for volumetric frequencies of the particle size, which are calculated by the values of the parameters from the number distribution functions LHPD-4p and collected in table 3.

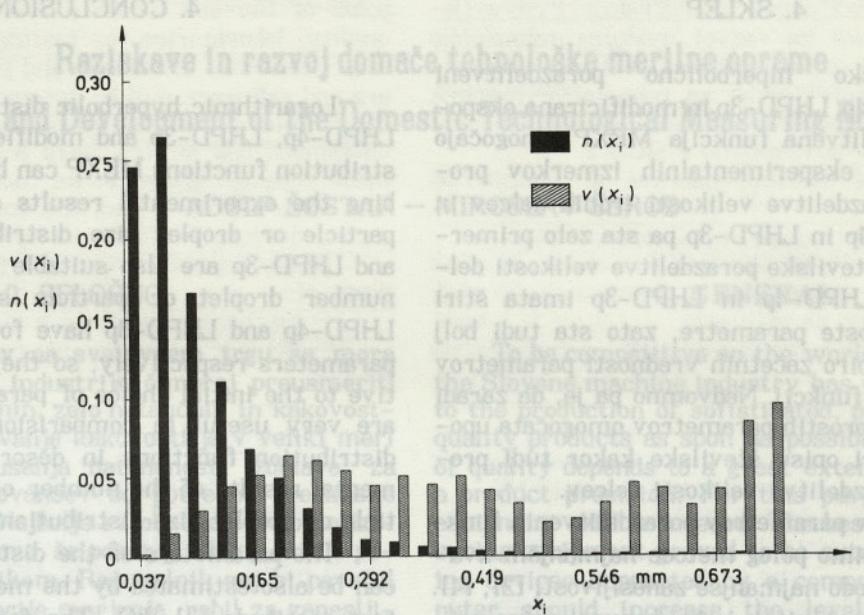
Sl. 7. Histogram prostorninskega in številskega deleža kapljic $v(x_i)$, $n(x_i)$ za velikost kapljic x_i .

Fig. 7. Histogram of the volumetrical $v(x_i)$ and number $n(x_i)$ portion of droplet size distribution for the droplet size x_i .

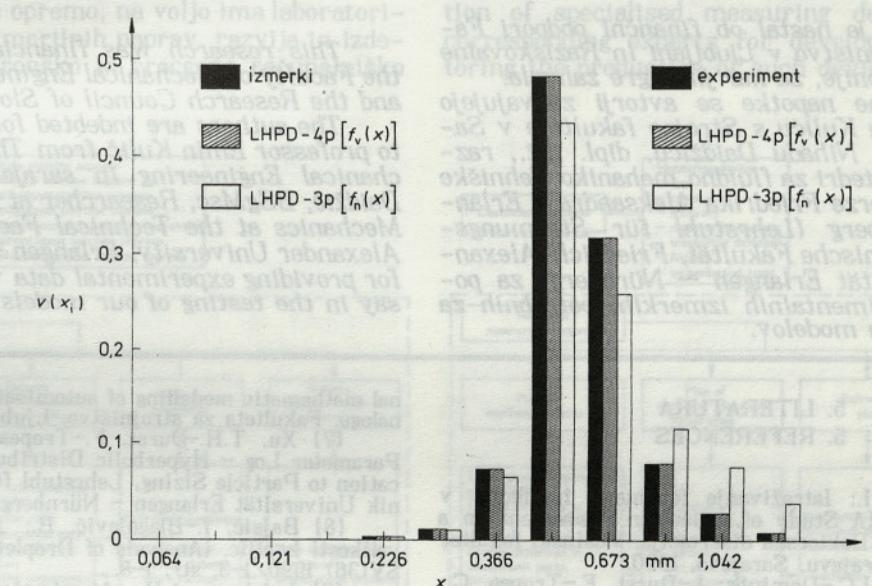
Sl. 8. Histogram prostorninskega deleža trdnih delcev $v(x_i)$ za velikost trdnih delcev x_i .

Fig. 8. Histogram of the volumetrical portion of particles size distribution $v(x_i)$ for droplet size x_i .

— Vrednosti parametrov MEXP v preglednici 7 se nekoliko razlikujejo od vrednosti, opisanih v [8], ker smo parameter a zamenjali z normirano konstanto in s tem poenostavili algoritem za izračun prostorninskega deleža delcev.

— The parameters of the MEXP function in table 7 are different from those in paper [8], because the parameter a (here) is the normalization constant. The simplifies the algorithm.

4. SKLEP

4. CONCLUSIONS

Logaritemsko hiperbolično porazdelitveni funkciji LHPD-4p, LHPD-3p in modificirana eksponentna porazdelitvena funkcija MEXP omogočajo analitičen opis eksperimentalnih izmerkov prostorninske porazdelitve velikosti trdnih delcev in kapljic. LHPD-4p in LHPD-3p pa sta zelo primerne tudi za opis številske porazdelitve velikosti delcev. Funkciji LHPD-4p in LHPD-3p imata štiri oziroma tri proste parametre, zato sta tudi bolj občutljivi na izbiro začetnih vrednosti parametrov porazdelitvenih funkcij. Nedvomno pa je, da zaradi večjega števila prostih parametrov omogočata uporabnost tako pri opisu številske kakor tudi prostorninske porazdelitve velikosti delcev.

Za določitev parametrov porazdelitvenih funkcij lahko uporabimo poleg metode najmanjših kvadratov tudi metodo najmanjše zanesljivosti [2], [4]. Poleg opisanih ugotovitev je iz obravnavanega prispevka razvidno, da je predlagani zapis modificirane eksponentne porazdelitvene funkcije MEXP (po predlogu avtorjev) za opis prostorninskega deleža velikosti kapljic matematično in numerično enakovreden dokaj zahtevnim logaritemsko hiperboličnim porazdelitvenim funkcijam.

ZAHVALA

Prispevek je nastal ob finančni podpori Fakultete za strojništvo v Ljubljani in Raziskovalne skupnosti Slovenije, za kar jima gre zahvala.

Za koristne napotke se avtorji zahajujejo prof. dr. Eminu Kulicu s Strojne fakultete v Sarajevu in mag. Nihadu Daidžiću, dipl. inž., raziskovalcu na katedri za fluidno mehaniko Tehniške fakultete Univerze Friedrika Aleksandra v Erlangen – Nürnberg (Lehrstuhl für Strömungsmechanik Technische Fakultät, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen – Nürnberg) za podatke o eksperimentalnih izmerkih, potrebnih za testiranje naših modelov.

5. LITERATURA

5. REFERENCES

[1] Bajšić, I.: Istraživanje fenomena indukcije v dvofaznom toku. (A Study of induction Phenomena in a two-phase flow). Doktorska disertacija. Mašinski fakultet Univerziteta u Sarajevu, Sarajevo, 1990.

[2] Bhatia, J.C.–Dominik, J.–Durst, F.–Tropea, C.: Phase-Doppler Anemometry and Log-Hyperbolic Distribution applied to Liquid sprays. Part.Syst.Charact. Vol. 5 (1988), str. 153–164.

[3] Durst, F.–Macagno, M.: Experimental Particle Size Distributions and Their Representation by Log-Hyp. Functions. Powder Technology, 45(1986), str. 223–244.

[4] Bhatia, J.C.–Durst, F.: LHPF-a Package for Estimating Parameters of the Log-Hyp. Distribution, Moments and Mean Diameters, Report No. LSTM 230/T/88. Universität Erlangen – Nürnberg, (1988).

[5] Bhatia, J.C.–Durst, F.: On the Estimation of Parameters for Two Non – Gaussian Distributions, Report No. LSTM 39/T/84, Universität Erlangen – Nürnberg, (1984).

[6] Kamnik, M.: Dvodimenzionalno matematično modeliranje procesa razprševanja kapljevin. (Two Dimen-

Logarithmic hyperbolic distribution functions LHPD-4p, LHPD-3p and modified exponential distribution functions MEXP can be used for describing the experimental results of the volumetric particle or droplet size distributions. LHPD-4p and LHPD-3p are also suitable for describing the number droplet or particle size distributions. LHPD-4p and LHPD-3p have four and three free parameters respectively, so they are very sensitive to the initial choice of parameters. But they are very useful in comparison with the other distribution functions in describing the experimental results of the number or volumetric particle or droplet size distributions.

The parameters of the distribution functions can be also estimated by the method of the greatest certitude [2], [4]. The form of the MEXP, (as suggested by the authors), distribution function for describing volumetric droplet or particle size distributions is mathematical, and numerical, equivalent to exact logarithmic hyperbolic distribution functions.

Some results for the number density distribution, but MEXP is not so suitable.

– The current research and application of the distribution functions are the aggregate

This research was financially supported by the Faculty of Mechanical Engineering in Ljubljana and the Research Council of Slovenia.

The authors are indebted for helpful guidance to professor Emin Kulic from The Faculty of Mechanical Engineering in Sarajevo and to Nihad Daidžić, BSgMsc, Researcher at the Dept. of Fluid Mechanics at the Technical Faculty of Friedrich Alexander University, Erlangen – Nürnberg, FRG, for providing experimental data which were mas-

say in the testing of our models.

nal mathematic modelling of automated fluids. Diplomska naloga, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana 1991.

[7] Xu, T.H.–Durst, F.–Tropea, C.: The Three – Parameter Log – Hyperbolic Distribution and its Application to Particle Sizing, Lehrstuhl für Strömungsmechanik Universität Erlangen – Nürnberg, 1991.

[8] Bajšić, I.–Blagojević, B.: Analiza porazdelitve velikosti kapljic. (Analysis of Droplet Size Distribution). SV(36) 1990/1–3, str. 1–8.

[9] Lefebvre, A.H.: Atomization and Sprays. Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1989.

[10] Medenblick, H.J.Th.: Vergleich von Tropfengrößen-Meßverfahren, No.771, Lechler, Fellbach, 1977.

[11] Nieuwkamp, W.Ch.: Messen von Tropfen > 50 µm, No 852, Lechler, Fellbach, 1985.

Naslov avtorjev: doc. dr. Ivo Bajšić, dipl. inž.
Authors' Address: mag. Bogdan Blagojević, dipl. inž.
prof. dr. Bogomil Pertot, dipl. inž.
Fakulteta za strojništvo Univerze v
Ljubljani
Faculty of Mechanical Engineering
University of Ljubljana

Prejeto: 10.11.1991

Received:

Recenzirano: 28.1.1992

Reviewed: 28.1.1992