UDK 535.2:535.34/.35:534-8

Enodimenzionalni model optičnega vzbujanja termoelastičnih valov

2.DEL: POMIKI MEJNIH PLOSKEV

JANEZ MOŽINA — MARJAN DOVČ

Nastanek in širjenje termoelastičnih valov, ki spremljajo absorpcijo svetlobnih sunkov v izotropni trdni snovi, je teoretično opisan z enodimenzionalnim matematičnim modelom, ki temelji na sistemu enačb dinamične termoelastičnosti in upošteva eksaktne mehanske robne pogoje. Model smo rešili analitično in numerično ter primerjali rezultate. Iz splošne analitične rešitve modela smo izpeljali izraz za amplitudo pomika prve in druge mejne ploskve v odvisnosti od trajanja in jakosti svetlobnega sunka ter v odvisnosti od absorpcijskega koeficienta snovi.

0 UVOD

O splošni rešitvi problema, podani z analitičnimi izrazi za Greenove funkcije, smo že pisali v prvem delu članka [1]. Pri tem smo zanemarili sklopitveni člen v enačbi za prevajanje toplote, končno rešitev pa podali z asimptotičnim izrazom (daleč stran od osvetljene površine). Tokrat smo se reševanja enodimenzionalnega modela [2] lotili tudi numerično [3]. Rezultati so v okviru numeričnih napak eksaktni (upoštevajo sklopitveni člen) in se z analitičnimi dobro ujemajo. Z analitično rešitvijo smo izpeljali izraz za amplitudo pomika druge mejne ploskve in izraz za pomik prve mejne ploskve. Rešitvi kažeta, da se telo po osvetlitvi razširi tako, da se prva mejna ploskev izboči v nasprotni smeri gibanja termoelastičnega vala, drugo mejno ploskev pa premakne sam val, in sicer v smeri svojega pomikanja. Vsota vseh pomikov ostane enaka nič (če zanemarimo gibalno količino, ki jo nosi svetlobni sunek) in težišče telesa se ne spremeni.

1 SPLOŠNA REŠITEV

V prvem delu smo prostor [2] sestavili iz dveh polprostorov, ki se stikata na mestu $x = 0$. Snov v polprostoru $x < 0$ (predprostor) je optično prozorna in toplotno neprevodna, v polprostoru $x > 0$ (telo), kjer smo iskali rešitev, pa je optično absorptivna in toplotno prevodna. Iz enačb dinamične termoelastičnosti [4]:

$$\lambda T_{xx} = \rho c_v (T_t + \gamma T_0 u_{xt}) - w(x, t),$$

$$c^2 u_{xx} = u_{tt} + \gamma c_v T_x \qquad \text{za } x > 0$$

$$T = T_0 , \quad c_1^2 u_{xx} = u_{tt} \qquad \text{za } x < 0 \qquad (1)$$

smo izračunali temperaturno polje $T = T(x, t)$ in polje pomikov $u = u(x,t)$. V zgornjih enačbah (1) je γ Grünesienova konstanta [5], katere vrednost je za večino kovin ≈ 1, λ, ρ, c_v T_0 in c ter c_1 pa so: termična prevodnost, gostota, specifična toplota, temperatura okolice in zvočni hitrosti v prostoru ter predprostoru. Pri tem je z $w(x, t)$ označena prostorninska gostota moči toplotnega vira:

$$w(x, t) = a\mu \exp(-\mu x)\, I(t) \qquad (2),$$

kjer sta a in μ absorptivnost in absorpcijski koeficient za vpadlo svetlobo, $I(t)$ pa je gostota energijskega toka svetlobnega sunka.

S predpostavko, da je v trenutku, ko vklopimo svetlobni sunek ($t = 0$), celotni sistem v termomehanskem ravnovesju:

$$T(x, 0) = 0 \quad \text{in} \quad u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \qquad (3),$$

in upoštevanjem mehanskih ter termičnih robnih pogojev:

$$grad(T)/_{x=0} = 0,$$

$$u(+0, t) = u(-0, t),$$

$$c^2 u_x(+0, t) - \gamma c_v T(+0, t) = K c_1 c\, u_x(-0, t) \qquad (4),$$

kjer je K razmerje mehanskih impendanc snovi v obeh polprostorih:

$$K = \frac{Z_1}{Z} = \frac{\rho_1 c_1}{\rho c} \qquad (5),$$

ki so določeni z zveznostjo pomika in napetosti, smo enolično določili rešitev problema in zapisali Greenovo funkcijo pomika v telesu kot obrat funkcije:

$$G_u(\xi,\tau) = L^{-1}\frac{ap^2fh}{s-p^2}\left(\left(\frac{\sqrt{s}+K}{s(s-1)} - \frac{s+pK}{p(s^2-p^2)}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{e^{-s\xi}}{1+K} + \frac{e^{-s\xi}}{s^2-p^2} - \frac{e^{-\sqrt{s}\xi}}{s(s-1)}\right) \quad \text{za } \xi > 0 \qquad (6).$$

Pri tem smo zaradi preglednosti vpeljali brezdimenzijski koordinati za čas in dolžino ter brezdimenzijski absorpcijski koeficient:

$$\tau = \frac{t}{t_k}, \quad \xi = \frac{x}{c\,t_k}$$

$$\text{in} \quad p = \mu c\, t_k \qquad (7),$$

in označili:

$$h = \frac{1}{\rho c_v c}, \qquad f = \frac{\gamma c_v\, t_k}{c} \qquad (8).$$

Vseskozi pa nas je spremljal karakteristični termoelastični čas [2]:

$$t_k = \frac{\lambda}{\rho c_v c^2} \qquad (9).$$

2 POMIK PRVE MEJNE PLOSKVE

Pomik prve mejne ploskve lahko zapišemo kot konvolucijo:

$$u(0,\tau) = \int_0^\tau G_u(0,\tau-t)\, I(t)\, dt \qquad (10).$$

Greenova funkcija pomika prve mejne ploskve je določena z izrazom (6). Z uporabo preglednic Laplaceovih transformacij [2] dobimo:

$$G_u(0,\tau) = \frac{afh}{1+K}\left(\frac{p}{1-p^2}\left(E(p\sqrt{\tau}) - pE(\sqrt{\tau})\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-p\tau}}{1+p} - 1\right) \qquad (11),$$

kjer je $E(x) = exp(x^2)\,erfc(x)$, $erfc(x)$ pa je kofunkcija napake [7]. Če sedaj predpostavimo, da ima časovna odvisnost svetlobne intenzitete obliko:

$$I(t) = \frac{W_S}{t_k}\,\tau b^2\, exp(-b\tau) \qquad (12),$$

kjer je $b = \frac{t_k}{t_0}$, t_0 in W_s pa sta trajanje in površinska gostota energije svetlobnega sunka [2], lahko izraz za časovno odvisnost pomika prve mejne ploskve zapišemo:

$$u(0,\tau) = \frac{afh\,W_S\,b}{(1+K)t_0}\left(\frac{p}{1-p^2}\,I(\tau) + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-p\tau} - [(b-p)\tau+1]\,e^{-b\tau}}{(1+p)(b-p)^2} - \frac{1-(b\tau+1)\,e^{-b\tau}}{b^2}\right) \qquad (13),$$

kjer je:

$$I = \frac{E(p\sqrt{\tau_1}) + \left(3+\frac{p^2}{b}+2p^2\tau_1+2b\tau_1\right)\frac{p\,D(\sqrt{b\tau_1})}{\sqrt{\pi b}} - \left(1+\frac{p^2}{b}\right)p\sqrt{\frac{\tau_1}{\pi}} - (1+p^2\tau_1+b\tau_1)\,e^{-b\tau_1}}{(p^2+b)^2} -$$

$$-p\,\frac{E(\sqrt{\tau_1}) + \left(3+\frac{1}{b}+2(1+b)+\tau_1\right)\frac{D(\sqrt{b\tau_1})}{\sqrt{\pi b}} - \left(1+\frac{1}{b}\right)\sqrt{\frac{\tau_1}{\pi}}(1+(1+b)+\tau_1)\,e^{-b\tau_1}}{(1+b)^2} \qquad (14).$$

$D(x)$ pa je Dawsonov integral [8].

3 POMIK DRUGE MEJNE PLOSKVE

Enačba (6) velja le za izbrano geometrijsko obliko, v kateri sta tako prozorna kakor absorbirajoča snov aproksimirani kot polprostora. V resnici je telo vedno končno dolgo in je torej omejeno še z drugo mejno ploskvijo, ki leži nekje na mestu $x > 0$. V nadaljevanju bomo predpostavili, da je druga mejna ploskev daleč stran od osvetljene površine ($\xi >> p^{-1}$) in z limitnim postopkom $\xi \to \infty$ poenostavili izraz (6) za Greenovo funkcijo pomika:

$$G_u(\tau_1) = afh\left(\frac{exp(p\tau_1)}{2(1-p)} - \frac{p^2}{1-p^2}\,exp(\tau_1)\right)$$

za $\tau_1 < 0$

$$G_u(\tau_1) = \frac{afh}{1+K}\left((1-K)\frac{exp(-p\tau_1)}{2(1+p)} + K + \right.$$

$$\left. + \frac{p^2}{1-p^2}\left(E(p\sqrt{\tau_1}) - pE(p\sqrt{\tau_1})\right)\right)$$

za $\tau_1 > 0$

(15),

τ_1 je reducirani čas in je enak razliki brezdimenzijskega časa in koordinate:

$$\tau_1 = \tau - \xi \qquad (16).$$

Sedaj se koordinatni sistem s hitrostjo zvoka pomika hkrati z mehanskim valom.

Val, ki nastane ob absorpciji svetlobe na prvi mejni ploskvi, se razširi do druge, kjer se odbije in nato potuje sem ter tja, dokler zaradi ošibitve popolnoma ne zamre. Pri tem se posamezni pomiki medsebojno superponirajo. Seštevanju se lahko izognemo z izbiro dovolj velike debeline plasti l, tako da je čas med dvema zaporednima odbojema večji od trajanja vpadlega svetlobnega sunka:

$$l > \frac{c\,t_0}{2} \qquad (17).$$

Pomik druge mejne ploskve je tako sestavljen iz posameznih časovno ločenih sunkov. Med njimi je za nas najzanimivejši prvi, ki ga izračunamo kot konvolucijo:

$$u(l, \tau_1 + 1) = \int_0^{\tau_1 + l} G_u(l, l + \tau_1 - t)\, i(t)\, dt$$

(18).

Ker je čas trajanja svetlobnega sunka večinoma veliko večji od karakterističnega termoelastičnega časa t_k prek (17) sledi, da lahko pomik druge mejne ploskve izračunamo kot limito:

$$u(\tau_1) = 2 \lim_{l \to \infty} u(l, \tau_1 + l) = 2 \int_0^{\infty} G_u(\tau_1 - t)\, i(t)\, dt$$

(19).

Tu smo upoštevali, da je tako kakor na meji trdno — vakuum, tudi na meji trdno — zrak Greenova funkcija praktično dvakrat večja kakor za kontinuum. Upoštevajoč izraz (12) za časovno odvisnost intenzitete svetlobnega sunka, lahko izraz za pomik druge mejne ploskve zapišemo:

$$u(\tau_1) = \frac{afhW_s b}{t_0}\left(\frac{exp(p\tau_1)}{(1-p)(p+b)^2} - \frac{2p\,exp(p\tau_1)}{(1-p^2)(1+b)^2}\right)$$

za $\tau_1 = 0$

$$u(\tau_1) = \frac{afhW_S b}{t_0}\left(\frac{1+(p+b)\tau_1}{(p+b)^2} - \frac{2p(1+(1+b)\tau_1)}{(1+p)(1+b)^2}\right) \times$$

$$\times \frac{e^{-p\tau_1}}{1-p} + \frac{R}{(1+p)(p-b)^2}\left(((p-b)\tau_1 - 1)e^{-b\tau_1} + e^{-p\tau_1}\right) +$$

$$+ \frac{1-R}{b^2}\left(1-(1+b\,\tau_1)\,e^{-b\tau_1}\right) + \frac{p(1+R)}{1-p^2}\,I$$

za $\tau_1 > 0$ (20),

kjer je $R = (1-K)/(1+K)$.

4 PRIMERJAVA Z NUMERIČNIMI REZULTATI

Pomike prve in druge mejne ploskve, izračunane numerično [3] (brez aproksimacij in poenostavitev), lahko primerjamo z analitičnimi rešitvami in tako ocenimo natančnost Greenove funkcije (6) in asimptotične Greenove funkcije (15). Za to potrebujemo konkretne snovne parametre, katerih tipične vrednosti za kovine so:

$$\frac{c}{c_v} = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{Ks}}, \quad t_k = 10^{-11}\,\mathrm{s},$$

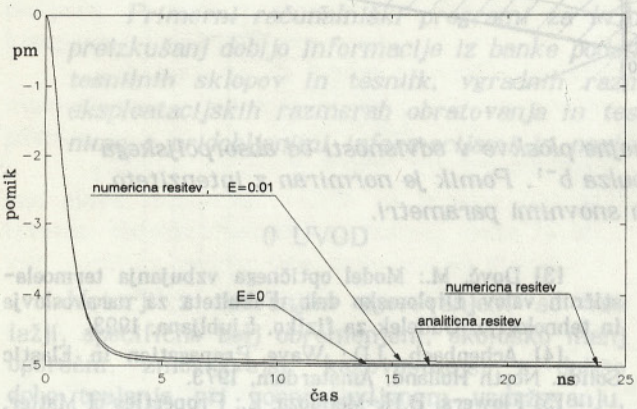
$$\rho t_k c^2 = 1\ \mathrm{Pa\,s}, \quad c_v = 5 \cdot 10^2\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}},$$

$$\gamma = 1,\ a = 0{,}5,\ T_0 = 500\ \mathrm{K},\ p = 1.$$

Ker je snov v predprostoru zrak, lahko dodamo: $K = 0 \rightarrow R = 1$.

Kakor smo omenili že v uvodu, je pomik prve mejne ploskve negativen, saj se ta premakne v predprostor. To vidimo na sliki 1. Pomik je izračunan trikrat: dvakrat numerično [3] in enkrat z Laplaceovo metodo [2]. Numerična rešitev, ki se z analitično skoraj popolnoma ujema, tako kakor slednja, tudi sama zanemarja sklopitveni člen:

$$E\,\dot{u}_x \qquad (21).$$



Sl. 1. *Pomik prve mejne ploskve je rešen analitično in numerično. Intenziteta vpadlega svetlobnega sunka je 1 J/m² in traja 1 ns. Debelina telesa je večja od 1 μm. Amplituda pomika je, če upoštevamo sklopitveni koeficient E = 0,01, za 1 odstotek manjša.*

To pomeni, da je sklopitveni koeficient E, ki se v brezdimenzijski obliki lahko zapiše kot:

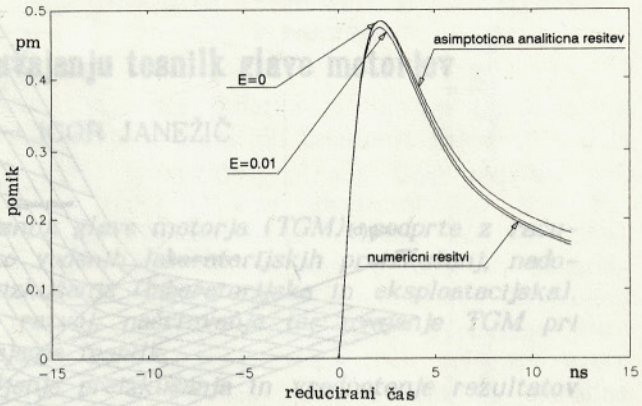
$$E = \left(\frac{c_v}{c}\,\gamma\right)^2 \frac{T_0}{c_v} \qquad (22),$$

enak nič. Za večino kovin pa je brezdimenzijski sklopitveni koeficient (22) reda velikosti 10^{-2}. Pri numerični rešitvi, ki upošteva sklopitveni člen (21), opazimo rahlo zmanjšanje amplitude, oblika krivulje pomika pa se ne spremeni. Če je dolžina svetlobnega sunka *1 ns*, se pri kovinah amplituda zmanjša za približno 1 odstotek. Ta sprememba pa je pri daljših časih t_0 še manjša [3].

Numerični izračun temelji na geometrijski obliki s končno debelino telesa, analitični pa s polneskončno. Zato pričakujemo, da se bosta rešitvi za pomik druge mejne ploskve ujemali v primeru, ko je debelina telesa veliko večja od vdorne globine svetlobe:

$$\xi \gg p^{-1} \qquad (23).$$

V trenutku, ko val doseže drugo mejno ploskev, je reducirani čas enak nič. Na sliki 2 vidimo, da je



Sl. 2. *Pomik prve mejne ploskve je rešen analitično in numerično. Intenziteta vpadlega svetlobnega sunka je 1 J/m² in traja 1 ns. Debelina telesa je večja od 1 μm. Amplituda pomika je, če upoštevamo sklopitveni koeficient E = 0,01, za 2 odstotka manjša.*

krivulja pomika sestavljena iz dveh delov. V prvem delu se pomik povečuje do maksimuma, v drugem pa se relaksira v ravnovesno stanje, ki ni nujno prvotno ničelno stanje.

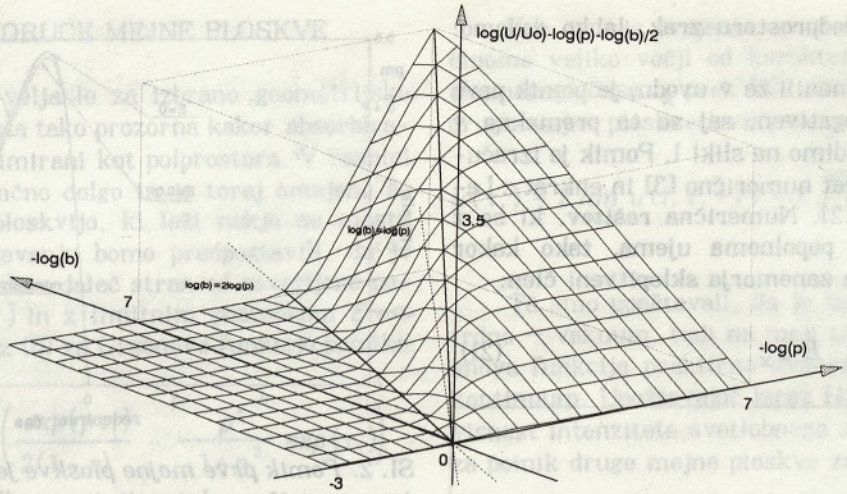
Tudi pomik druge mejne ploskve je izračunan trikrat. Prva numerična rešitev, ki se z analitično dobro ujema, zanemarja sklopitveni člen (21), druga pa ta člen upošteva. Pri tem se amplituda spremeni za okoli -2 odstotka, če je dolžina svetlobnega sunka t_0 = *1 ns*. Analitična in obe numerični rešitvi se rahlo razlikujeta tudi v obliki krivulje pomika, zaradi limitnega postopka ($\xi \rightarrow \infty$). Še vedno pa velja, da je sprememba amplitude pri daljših časih t_0 manjša kakor pri krajših [3]. Pri eksperimentalnem delu nas velikokrat zanima le približna velikost amplitude pomika mejne ploskve. Zato smo poiskali razmerje med amplitudo pomika druge mejne ploskve in časom trajanja svetlobnega sunka.

Kakor je razvidno iz enačbe (15), je oblika pomika druge mejne ploskve odvisna le od brezdimenzijskega absorpcijskega koeficienta (p) in dolžine svetlobnega sunka (b^{-1}). Amplituda pomika druge mejne ploskve kot funkcija obeh parametrov je prikazana na sliki 3.

V skladu z asimptotično analitično rešitvijo (19) za pomik druge mejne ploskve, lahko izraz za amplitudo pomika u_{max} v odvisnosti od trajanja svetlobnega sunka t_0 zapišemo kot:

$$u_{max} \approx u_0 \begin{cases} 0{,}964\, p\sqrt{b}\,, & p > \sqrt{b} \\ p\,, & b < p < \sqrt{b} \\ 0{,}75\, b\,, & p < b \end{cases}$$

$$u_0 = a\,\frac{\gamma}{\rho\, c^2}\, W_s \quad \text{in} \quad b \leq 1 \qquad (24).$$



Sl. 3. *Normirana amplituda pomika druge mejne ploskve v odvisnosti od absorpcijskega koeficienta p in od trajanja svetlobnega impulza b^{-1}. Pomik je normiran z intenziteto svetlobnega impulza in snovnimi parametri.*

V izrazu (24) se zahteva, da je b manjši od 1. Ta pogoj je izpolnjen, ko je dolžina svetlobnega sunka t_0 večja od karaktrističnega termoelastičnega časa t_k. Za kovine to pomeni, da mora biti svetlobni sunek daljši od 10 ps. Ker za kovine velja $p \geq 1$, dobimo izraz:

$$u_{maks} = 0{,}964\, a\, W_s \frac{\mu \gamma t_k}{\rho c} \sqrt{\frac{t_k}{t_0}} \qquad (25).$$

5 SKLEPI

V prispevku je podana analitična rešitev enodimenzionalnega modela optičnega vzbujanja termoelastičnih valov. Model temelji na enačbah dinamične termoelastičnosti in upošteva eksaktne termične in mehanske robne pogoje. Rezultat reševanja z Laplaceovo metodo so izrazi za Greenove funkcije pomika. Analitično rešitev dopolnjujejo numerični rezultati, ki se z njo zelo dobro ujemajo in s tem potrjujejo njeno pravilnost. Zato smo lahko iz Greenovih funkcij z limitnim postopkom dobili asimptotični analitični izraz za pomik druge mejne ploskve in empirično določili relacijo za amplitudo pomika druge mejne ploskve. Predvsem ta relacija pa je pomembna za primerjavo z eksperimentalnimi rezultati.

6 LITERATURA

[1] Možina, J.: Enodimenzionalni model optičnega vzbujanja termoelastičnih valov 1. del: Splošna rešitev problema, Strojniški vestnik, Ljubljana, (37) 1991, 169.

[2] Možina, J.: Akustična emisija pri energijskih pretvorbah na površini kovin. Doktorska disertacija, Fakulteta za strojništvo, Univerze v Ljubljani 1980.

[3] Dovč, M.: Model optičnega vzbujanja termoelastičnih valov. Diplomsko delo, Fakulteta za naravoslovje in tehnologijo, Oddelek za fiziko, Ljubljana, 1993.

[4] Achenbach, J.D.: Wave Propagation in Elastic Solids. North Holland, Amsterdam, 1973.

[5] Flowers, B.H.–Mendoza, E.: Properties of Matter, J. Wiley, London, 1970.

[6] Chandrasekharaiah, D.S.: Thermoelasticity with Second Sound, Appl. Mech. Rev. (39), 1986, str. 355.

[7] Vidav, I.: Višja matematika III, DZS. Ljubljana, 1976.

[8] Abramovitz, M.–Stegun, I.: Handbook of Mathematical Functions, Dover Publ. New York, 1970.

[9] Danilovskaja, V.I.: Thermal Stresses in Anelastic Halfspace due to Sudden Heating on the Surface, Prikladnaja matem. meh. (14), 1950, str. 316.

[10] Michaels, J.E.: Thermally Induced Elastic Wave Propagation in Slender Bars. Proc. Third US at. Con. Appl. Mech. ASMB. New York 1958, str. 209.

[11] Boley, B.A.–Tolins, I.S.: Transistent Coupled Thermoelastic Boundary Value Problems in the Half Space, J. Appl. Mech. (29), 1962, str. 637.

[12] White, R.M.: Generation of Elastic Waves by Transient Surface Heating, J. Appl. Phys. (34), 1963, str. 3559.

[13] Pao, Y.H. (Ed.): Optoacoustic Spectroscopy and Detection, Academic Press, New York, 1977.

[14] Rosencwaig, A.: Photoacoustics and Photoacoustisc Spectroscopy, Wiley, New York,1980.

[15] Bell, A.G.: Upon the Production of Sound by Radiant Energy, Am. J. Sci. (21), 1981, str. 463.

[16] Scruby, C.B.: Some Applications of Laser, Ultrasonics (27), 1989, str. 195.

[17] Smith, G.D.: Numerical Solutions of Partial Differential Equations, Oxford University Press, Ely House, London 1965, 1969, 1975.

Naslov avtorjev: prof. dr. Janez Možina, dipl. inž.,
Marjan Dovč, dipl. inž.
Fakulteta za strojništvo
Univerze v Ljubljani
Aškerčeva 6
61000 Ljubljana

Prejeto: 9.9.1994 Sprejeto: 23.2.1995