

UDK 531.391:519.61/.64:620.178.3

Širjenje razpok v snoveh z mehčalno karakteristiko pri dinamičnih obremenitvah Progressive Fracturing of Softening Materials Under Dynamic Loading Conditions

ZORAN REN — NENAD BIĆANIĆ

Prispevek obravnava pojavno usmerjen postopek modeliranja nastanka in širjenja razpok v snoveh z mehčalno karakteristiko za primer prenosnih dinamičnih problemov, temelječ na izkustveni formulaciji napetosti in deformacij ter uporabi teorije viskoplasticnosti v okviru metode končnih elementov. Za koračno neposredno časovno integracijo gibalnih enačb je uporabljena metoda srednjih odstopkov, pri čemer je matrika diskretnih mas diagonalizirana in je predpostavljena sorazmernost dušilne matrike dinamičnega problema. V vzetem osnutku porazdeljenih rotirajočih razpok je predpostavljeno, da je nastanek mikrorazpok odvisen od kršitve kriterija plastičnosti in je njihova rast nadalje odvisna od procesa deformacijskega mehčanja. Pri tem je tudi predpostavljeno, da je progresivna poškodba izotropna in je modelirana s postopno izgubo nosilnosti. Pojav deformacijskega mehčanja v telesu nujno vodi do lokalizacije deformacije, ki povzroči lokalno izgubo nosilnosti ob nastanku razpok v lokalizacijskih območjih. Nadaljnje širjenje teh območij intenzivnih deformacij povzroči nastanek popolnoma odprtih razpok in tako tudi nezveznost konstrukcije. Za modeliranje nastanka diskretnih razpok v prvotno zveznem telesu zaradi izgube nosilnosti v lokalizacijskem območju je predlagana uporaba tehnike odstranjevanja končnih elementov. Podan je ustrezni numerični zgled.

A phenomenological approach based on the empirical formulation of stresses and strains is followed in this paper, utilising the theory of viscoplasticity in the general framework of the finite element method for modelling the progressive fracturing of softening materials in transient dynamic problems. The central difference method is used for a step-by-step direct time integration of equations of motion, which is coupled with lumped mass and proportional damping matrices. In the context of the rotating smeared crack approach, it is assumed that micro-cracking is initiated upon the violation of a yield criterion and is further governed by the strain softening process. The progressive damage is assumed to be isotropic and is modelled with the gradual reduction of the load carrying capability. The occurrence of strain softening in the continuum leads to the localisation of deformation, which causes a local failure through the occurrence of cracks in the localised zones. Further propagation of localised zones of intense deformation leads to the development of fully opened cracks and consequently to a structural discontinuity. A finite element removal technique is proposed for modelling the final separation of the continuum, when a complete loss of the load carrying capability in the localised zone has been achieved. A representative numerical example is given.

0 UVOD

Za popoln numerični model nastanka in širjenja razpok v dinamični analizi je treba matematično opisati razvoj mikrorazpok, nastanek makrorazpok in gibanje odlomljenih delov. Ker je problem popolnoma spremenjen med dinamičnim obremenjevanjem, ki povzroči porušitev (od zveznega telesa do telesa z razpokami in končno do popolne ločitve delov), je treba uporabiti za dve karakteristični fazi problema različne numerične tehnike reševanja, in sicer *metodo končnih elementov* za modeliranje nastanka in širjenja razpok in *metodo diskretnih elementov* za modeliranje gibanja in končne ustalitve odlomljenih delov začetno zvezne strukture. Ta prispevek obravnava le prvo fazo problema, to je simuliranje nastanka in širjenja razpok.

0 INTRODUCTION

For a complete model of progressive fracturing in transient dynamic analysis, a description of the progressive development of micro-cracking, subsequent fracturing and fragment motion is required. As the structure is so completely changed during a transient loading that causes structure failure (from jointed solid to fracture cracked solid leading finally to a full separation) it is necessary to use different numerical techniques for two characteristic phases of the problem: a *finite element method* for modelling the progressive fracturing, and a *discrete element method* to model the motion and settling of separated parts of the initially continuous structure. This study is concerned only with the first phase, i.e. the numerical simulation of the progressive fracturing.

V zadnjih 25 letih je bilo razvitalih več modelov za simuliranje nastanka in širjenja razpok v okviru numerične analize različnih konstrukcij z metodo končnih elementov. Te modele je mogoče v osnovi razdeliti na dva primera: diskretne razpokane in porazdeljene razpokane. Medtem ko je v primeru diskretnih razpok razpoka že od vsega začetka modelirana kot geometrijska nezveznost [1], je v primeru porazdeljenih razpok le-ta modelirana v zveznem telesu, kjer je predpostavljeno, da nastane razpoka zaradi večjega števila enakomerno porazdeljenih mikrorazpok po celotni prostornini končnega elementa [2].

Vsak model razpok je sestavljen iz primerne kombinacije treh poglavitnih komponent: ugotovitev nastanka razpokane, načina obravnave razpok in kriterija širjenja razpokane. Glede na prvo komponento se različni modeli le malo razlikujejo, saj je v večini primerov za ugotovitev nastanka razpokane uporabljen kriterij največje nosilnosti. V osnovi sta bila razvita dva postopka obravnave razpok (diskretne ali porazdeljene razpokane) in dva kriterija širjenja razpokane (nosilnost in lomna trdnost). Mogoča je kombinacija vseh, za zdaj še ni soglasja glede splošne uporabnosti katerega od razvitalih modelov, saj ima skoraj vsak model določene pomanjkljivosti pri uporabi v analizah realnih konstrukcij z metodo končnih elementov.

V prispevku je predpostavljeno, da je nastanek mikrorazpok odvisen od kršitve pogoja plastičnosti in je njihovo širjenje nadalje odvisno od procesa deformacijskega mehčanja. Predpostavljeno je, da so razpokane homogeno porazdeljene po lokalizacijskem območju, kar se ujema z zamislio porazdeljenih razpok. Širjenje razpokane je simulirano kot interna izotropna poškodba, ki jo je mogoče opazovati z omejenim številom parametrov, kakršna je na primer velikost neelastične deformacije, pri kateri sta začetek in širjenje poškodbe nadzorovana z enotno funkcijo plastičnosti. Prednost takšnega načina je neodvisnost analize od smeri širjenja razpokane, ki jih je mogoče preprosto določiti med dinamično analizo. Tako je mogoče nelinearnost različnih materialov modelirati z uporabo enotne teorije viskoplastičnosti.

Pri dinamičnih zunanjih obremenitvah materialov je treba upoštevati tudi vztrajnost problema, kar se kaže v povečanju potrebne obremenitve za pričetek procesa mehčanja. Čeprav je na voljo le nekaj eksperimentalnih rezultatov, obstajajo utemeljeni dokazi o odvisnosti obnašanja snovi z mehčalno karakteristiko od hitrosti deformacij. Opaziti je mogoče znatno povečanje trdnosti pri večanju povprečne hitrosti deformacij od kvazistatičnih stopenj ($\approx 10^{-5}/\text{s}$) do velikih hitrosti, značilnih za udarne obremenitve ($\approx 10^2/\text{s}$), pri katerih je v skrajnosti mogoče pričakovati tudi podvojitev trdnosti. Nujno je, da vsaka nelinearna numerična dinamična analiza pravilno simulira te vplive na največjo nosilnost, največjo mogočo deformacijo in način porušitve analizirane konstrukcije.

Over the past 25 years, a number of different models have been developed to represent cracking during a finite element analysis of various structures. They can be basically subdivided into two approaches, a discrete crack approach and a smeared crack representation. The discrete approach models a crack from the onset of cracking as a geometrical discontinuity [1], whereas the smeared approach models a cracked solid as a continuum, where cracking is assumed to be caused by a set of densely populated or smeared cracks over the whole volume of the finite element [2].

Each cracking model is composed of a suitable combination of the three basic components: an initiation determination, a method of crack representation, and a criterion for crack propagation. In regard to the first component, there is a little difference between various models as they mostly rely on a strength criterion for crack initiation. Two methods of crack representation (discrete crack and smeared crack) and two criteria for crack propagation (strength and fracture toughness) have been introduced, and any combination of these is possible. As yet, there is no universal agreement on the general acceptability of any of these models due to various problems encountered when they are applied to the finite element analysis of real structures.

It is assumed in this paper that micro-cracking is initiated upon the violation of a yield criterion and is further governed by the strain softening process. The cracks are assumed to be homogeneously distributed over the localisation zone, which corresponds well to the idea of smeared crack models. Cracking is interpreted as an internal isotropic damage effect which can be unambiguously monitored by a limited number of parameters, such as the amount of inelastic straining, where a single yield function controls the onset and evolution of damage. The advantage of such an approach is the independence of the analysis from any crack directions, which can be simply identified during the transient dynamic analysis. The non-linear behaviour of different materials can then be modelled by using the unified framework of the theory of viscoplasticity.

Under transient loading conditions, inertia carries a part of the load, which is manifested in the increase of the load level corresponding to the initiation of softening. Despite relatively scarce experimental data, there is ample evidence of the strain-rate dependence of behaviour of softening materials. A significant increase of strength parameters can be observed as the average rate of straining increases from the quasi-static strain rate ($\approx 10^{-5}/\text{s}$) to very high strain rates typical for impact conditions ($\approx 10^2/\text{s}$) and at the extreme, the strength parameters can be nearly doubled. It is essential that any nonlinear transient dynamic numerical analysis correctly recovers these influences on the maximum load, the maximum attainable deformation and the failure mode of a structure.

1 NEPOSREDNA ČASOVNA INTEGRACIJA PROSTORSKO DISKRETIZIRANEGA DINAMIČNEGA PROBLEMA

Prostorsko diskretiziran dinamični problem je mogoče z uporabo metode končnih elementov zapisati v obliki naslednje matrične enačbe [6]:

vsi različni oblikovalci in določitveni vrednosti so rom preprost način (9).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}^n + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}^n + \mathbf{f}_{\text{int}}^n = \mathbf{f}_{\text{ext}}^n \quad (1)$$

Za popolno diskretizacijo dinamičnega problema pa je treba izvesti še neposredno časovno integracijo (1) za ugotovitev odvisnosti $\mathbf{d} = \mathbf{d}(t)$, pri čemer mora biti ravnotežje sistema zagotovljeno ob vsakem diskretnem trenutku. V primeru analiz širjenja napetostnih valov, pri katerih je tehničnega pomena odzivnost materiala na čelju širjenja napetostnih valov, je najprimernejša uporaba eksplisitnih neposrednih časovno integracijskih shem. Ker je za takšne vrste analiz že tako treba izbirati zelo majhne časovne korake, če želimo pravilno simulirati odziv konstrukcije, pogojna stabilnost eksplisitne časovne integracijske sheme po navadi ni problematična. Glede na to je bila za neposredno koračno časovno integracijo izbrana metoda srednjih odstopkov, po kateri so oddovi vektorja pomikov aproksimirani [1] z:

$$\mathbf{d}^n = \frac{\mathbf{d}^{n+1} - 2\mathbf{d}^n + \mathbf{d}^{n-1}}{(\Delta t)^2}$$

Z vstavljivo (2) v (1) po ureditvi dobimo:

$$\mathbf{d}^{n+1} = \left[\mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C} \right]^{-1} \cdot$$

$$\cdot \left\{ (\Delta t)^2 [\mathbf{f}_{\text{ext}}^n - \mathbf{f}_{\text{int}}^n] + 2\mathbf{M}\mathbf{d}^n - \left[\mathbf{M} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C} \right] \mathbf{d}^{n-1} \right\}$$

Reševanje tega sistema enačb se zelo poenostavi, če je mogoče matriko diskretnih mas \mathbf{M} in dušilno matriko \mathbf{C} dinamičnega problema na primeren način diagonalizirati. V tem prispevku je bila uporabljena posebna tehnika [4] za diagonalizacijo masne matrike \mathbf{M} . Sistemsko dušenje dinamičnega problema je bilo simulirano z uporabo Rayleighovega sorazmernega dušenja [5], pri katerem je predpostavljeno, da je:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} \quad (4)$$

1 DIRECT TIME INTERGRATION OF A SEMI-DISCRETED DYNAMIC PROBLEM

After a semi-discretisation of the dynamic problem by the finite element method, the following matrix equation is obtained [6].

To obtain the full discretisation of the dynamic problem, it is necessary to apply a direct time intergration of eq. (1) in order to find $\mathbf{d} = \mathbf{d}(t)$, with the equilibrium being satisfied at any time instance. For wave propagation problems, in which the behaviour at the propagating stress wave front is of engineering importance, it is computationally very efficient to use the explicit direct time integration method. Since very small time steps are already required for capturing the structure response correctly, the conditional stability of the method usually does not present a problem. The central difference time integration method has been chosen for a step-by-step direct time integration, where the time derivatives of the displacement vector can be approximated [1] by:

$$\text{in } \dot{\mathbf{d}}^n = \frac{\mathbf{d}^{n+1} - \mathbf{d}^{n-1}}{2\Delta t} \quad (2)$$

Substituting (2) into (1) yields:

$$\text{Solving this system can be much simplified, if the mass matrix } \mathbf{M} \text{ and the damping matrix } \mathbf{C} \text{ can be diagonalised in some suitable manner. In this paper, the special lumping technique [4] has been used for diagonalisation of the mass matrix } \mathbf{M}. \text{ The overall system damping was simulated by utilising the Rayleigh proportional damping [5], where it is assumed that:}$$

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} \quad (4)$$

Pri diagonalizirani masni matriki tako ob uporabi (4) tudi dušilna matrika postane diagonalna in rešitev sistema (3) je preprosta, saj postanejo enačbe popolnoma neodvisne. Tako za vsako prostostno stopnjo dobimo neodvisno enačbo za določitev komponente pomika pri času $t^n + \Delta t$ v odvisnosti od informacij o stanju sistema pri časih t^n in $t^n - \Delta t$, ki se nanašajo na obravnavano prostostno stopnjo, v obliki:

$$d_{ui}^{n+1} = \frac{(\Delta t)^2}{m_{ii}} \left[(f_{ext})_{ui}^n - (f_{int})_{ui}^n \right] + 2d_{ui}^n - (2 - B)d_{ui}^{n-1} \quad (5)$$

kjer je $B = 1 + (\Delta t \cdot c_{ii}) / (2m_{ii})$, pri $u \in \{x, y, z\}$ in $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ ter N enako številu vozlišč prostorsko diskretiziranega problema.

Enačbi (3) in (5) kažeta, da je mogoče pri uporabi metode srednjih odstopkov eksplisitno določiti pomike pri času $t^n + \Delta t$ v odvisnosti od znanih pomikov pri časih t^n in $t^n - \Delta t$. To pomeni, da je pri zagonu te metode časovne integracije pri $t^0 = 0$ treba določiti poseben začetni postopek, saj so pomiki $\mathbf{d}(0 - \Delta t)$ neznani. Začetni postopek je mogoče definirati z upoštevanjem dveh potrebnih začetnih pogojev, ki popolnoma definirata dinamični problem:

$$\mathbf{d}(0) = \mathbf{d}^0 \text{ in } \mathbf{d}(0) = \mathbf{v}^0 \quad (6)$$

saj pri vstavitvi teh enačb v (2) lahko zapišemo:

$$\dot{\mathbf{d}}(0) = \frac{\mathbf{d}(0 + \Delta t) - \mathbf{d}(0 - \Delta t)}{2\Delta t} \approx \mathbf{v}^0 \quad (7)$$

$$\mathbf{d}(0 - \Delta t) = \mathbf{d}(0 + \Delta t) - 2\Delta t \mathbf{v}^0$$

Če to aproksimacijo vstavimo v (5), lahko pomike pri času t^1 dobimo z:

$$d_{ui}^1 = \frac{(\Delta t)^2}{2m_{ii}} \left[(f_{ext})_i^0 - (f_{int})_i^0 \right] + d_{ui}^0 + (2 - B)\Delta t v_{ui}^0 \quad (8)$$

Identična enačba omogoča tudi možnost nadaljevanja analize po zaustavitvi. V primeru zaustavitve časovne integracije v določenem časovnem koraku je treba za njen ponovni zagon z enačbo (8) imeti na voljo le zapis pomikov, hitrosti in vztrajnostnih sil na koncu prejšnje faze numerične časovne integracije.

If eq. (4) is coupled with the lumped masses, the damping matrix also becomes diagonal and the solution of (3) is trivial, as a complete system decomposition is readily available. A separate equation is then obtained for each displacement degree of freedom at time $t^n + \Delta t$ involving information regarding only the degree of freedom at times t^n in $t^n - \Delta t$ in a form:

a continuum, where cracking is assumed to be a set of densely populated or smeared cracks over the whole volume of the finite element.

used of a suitable element as (1) discretized

where $B = 1 + (\Delta t \cdot c_{ii}) / (2m_{ii})$, where $u \in \{x, y, z\}$ and $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ and N is the number of nodes of the spatially discretised problem.

Eqs. (3) and (5) show that, using the central difference integration method, the displacements at time $t^n + \Delta t$ can be obtained explicitly from the displacements known at time instances t^n and $t^n - \Delta t$. This implies that the method is not self-starting and that a special starting algorithm is required at time $t^0 = 0$, since the displacements $\mathbf{d}(0 - \Delta t)$ are unknown. The starting algorithm can be obtained by using the two required initial conditions that completely define the dynamic problem:

genuinely distributed over the localisation zone, tends well to the idea of smeared elements such as

and substituting into (2) it holds that:

on the robustness of (3) of analysis, onset of damage. The analysis of such an analysis which can be simply identified during the

(7).

If this approximation is substituted further into eq. (5) then the displacements at t^1 can be obtained from:

An identical equation offers also the possibility of a restart of the analysis. If the time integration is stopped at some stage and is to be restarted, only a record of displacements, velocities and internal forces at the end of the previous phase of numerical integration is required for the restart of an analysis with eq. (8).

Pri eksplisitni časovni integraciji je pomembna ugotovitev, da ni zahteve po iterativnem zadovoljevanju ravnotežnih enačb, saj je ravnotežje sistema pri času t^n vedno domnevano. V vsakem diskretnem trenutku analize so pomiki \mathbf{d}^n znani, kar omogoča natančno določitev notranjih sil f_{int}^n . Glede na to je mogoče pri takšnih analizah upoštevati različne oblike nelinearnosti snovi na razmeroma preprost način [9].

2 DEFORMACIJSKO MEHČANJE IN MATERIALNI MODEL PORAZDELJENIH RAZPOK

Pojav deformacijskega mehčanja je mogoče opaziti pri različnih tehničnih materialih npr. zemljine, beton, polimeri in kovine. Pri teh materialih pride v določeni fazah do zmanjšanja nosilnosti ob hkratni naraščajoči deformaciji [8].

Pojav deformacijskega mehčanja snovi ima za posledico lokalizacijo deformacije, ki lahko povzroči porušitve ob pojavu razpok v lokalizacijskih območjih, kjer pride do lokalne izgube nosilnosti. Predpostavljeno je, da je material duktilen in morajo napetosti zadostiti večdimenzionalnemu pogoju plastičnosti, ki je v splošnem pri času t^n definiran kot:

$$f^n(\sigma^n, Y^n) = F(\sigma^n, Y^n) - F_0(Y^n) \quad (9).$$

Za dosledno matematično modeliranje snovi z mehčalno karakteristiko je treba v matematični opis snovi vključiti dodatne ali višje odvode, ki zagotovijo dobro pogojenost sistema tudi pri pojavu deformacijskega mehčanja in neodvisnost rezultatov od načina diskretizacije [3]. V prispevku je vzeto upoštevanje viskoznih, to je višjih časovnih odvodov neelastičnega tenzorja deformacij, pri katerih je teorija viskoplastičnosti hkrati uporabljena tudi za simuliranje obnašanja materiala v odvisnosti od hitrosti deformacije pri sunkovitih zunanjih obremenitvah.

Numerični proces reševanja temelji na razstavitev tenzorja deformacij $\boldsymbol{\epsilon}$ na tenzorja elastičnih deformacij $\boldsymbol{\epsilon}_e$ in viskoplastičnih deformacij $\boldsymbol{\epsilon}_{vp}$ v vsakem časovnem koraku:

$$\boldsymbol{\epsilon}^n = \boldsymbol{\epsilon}_e^n + \boldsymbol{\epsilon}_{vp}^n \quad (10).$$

Pri eksplisitni časovni integracijski shemi so pomiki \mathbf{d}^n in torej tudi deformacije $\boldsymbol{\epsilon}^n$ vedno znane. Napetosti so definirane z elastičnimi deformacijami:

$$\sigma^n = D_e \boldsymbol{\epsilon}_e^n \quad (11).$$

It is important to note that equilibrium iterations are not necessary during the explicit incremental step-by-step solution, as the equilibrium relation at time t^n is always considered. The displacements \mathbf{d}^n are known at any stage of the analysis and hence the internal forces f_{int}^n are obtainable. As a result, a wide variety of forms for material nonlinearities can be taken into account in a relatively simple fashion [9].

2 STRAIN SOFTENING AND SMEARED CRACKING MATERIAL MODEL

Strain softening can be observed in a large number of engineering materials, including soils, concrete, polymers and metals. These materials at some stage exhibit a reduction of the load-carrying capability with the increasing deformation [8].

The occurrence of strain softening in the continuum leads to the localisation of deformation, which can cause local failure through the occurrence of cracks in the localised zones. It is assumed that the material is ductile and that the stresses must satisfy a multiaxial yield criterion, which is in general defined at time t^n as:

For an appropriate mathematical modelling of the softening material, extra or higher-order derivatives are necessary in the continuum description for keeping the governing equations well-posed at the occurrence of the strain softening process and for obtaining mesh-independent results [3]. Here, the addition of viscous, i.e. higher order time derivatives, is adopted, where the theory of viscoplasticity is at the same time conveniently used to model the rate dependency of the materials subjected to impulsive external loading.

The computational procedure is based on the decomposition of the total strain $\boldsymbol{\epsilon}$ into the elastic strain $\boldsymbol{\epsilon}_e$ and the viscoplastic strain $\boldsymbol{\epsilon}_{vp}$ at any time step:

In the explicit time integration scheme, the total displacements \mathbf{d}^n and therefore total strains $\boldsymbol{\epsilon}^n$ are always known. The elastic strains define the stresses with:

Če vstavimo (10) v (11) dobimo:

$$\sigma^n = D_e (\epsilon^n + \epsilon_{vp}^n) \quad (12).$$

V tem prispevku predpostavljam, da so viskoplastične deformacije opisane s Perzynovo teorijo viskoplastičnosti [7], pri katerih je hitrost viskoplastične deformacije definirana kot:

$$\dot{\epsilon}_{vp} = \gamma(\Phi(f)) \frac{\partial q_{vp}}{\partial \sigma} \quad (13).$$

Funkcija $\Phi(f)$ je najpogosteje v obliki potenčne funkcije:

$$\Phi(f) = \left(\frac{f}{F_0} \right)^N \quad (14),$$

kjer je eksponent N izbran tako, da se viskoplastični odziv materiala ujema z dostopnimi eksperimentalnimi podatki. Za viskoplastične materiale, ki so izpostavljeni dinamičnim obremenitvam, morata $\Phi(f)$ in γ kazati realne lastnosti, časovna integracija viskoznih vplivov pa mora biti izvedena v realnem času.

Ob kršitvi kriterija plastičnosti $f^n(\sigma^n, Y^n) > 0$ je mogoče trenutno hitrost viskoplastične deformacije izračunati z enačbo (13) ter določiti celotno viskoplastično deformacijo na koncu časovnega koraka ob uporabi preproste Eulerjeve integracijske sheme:

$$\epsilon_{vp}^{n+1} = \epsilon_{vp}^n + \dot{\epsilon}_{vp}^n \Delta t \quad (15).$$

Časovna integracija vodilnih gibalnih enačb je izvedena vzporedno in v odvisnosti od časovne integracije viskoplastičnih konstitutivnih enačb, kakor to prikazuje slika 1.

Časovna odvisnost viskoplastične deformacije skupaj z načinom mehčanja materiala definira proces deformacijskega mehčanja, ki ga je mogoče v primeru izotropnega mehčanja modelirati s postopno izgubo nosilnosti ob naraščajoči viskoplastični deformaciji. Odvisnost velikosti meje plastičnosti je mogoče definirati prek odvisnosti ekvivalentne meje plastičnosti Y^n od parametra mehčanja x , torej $Y^n = Y(x^n)$. Vzeta je hipoteza deformacijskega mehčanja, pri kateri je časovna odvisnost parametra mehčanja opisana [6] z:

$$x^n = \int_0^{t^n} \dot{x} dt \quad (16),$$

kjer je hitrost parametra mehčanja sorazmerna drugi invarianti viskoplastičnega deformacijskega tenzorja:

Substituting eq. (10) into (11) leads to:

Here it is assumed that the viscoplastic strains obey the Perzyna viscoplasticity theory [7], where the viscoplastic strain rate is defined with:

$$\dot{\epsilon}_{vp} = \gamma(\Phi(f)) \frac{\partial q_{vp}}{\partial \sigma} \quad (13).$$

Function $\Phi(f)$ most commonly takes the form of the power function:

$$\Phi(f) = \left(\frac{f}{F_0} \right)^N \quad (14),$$

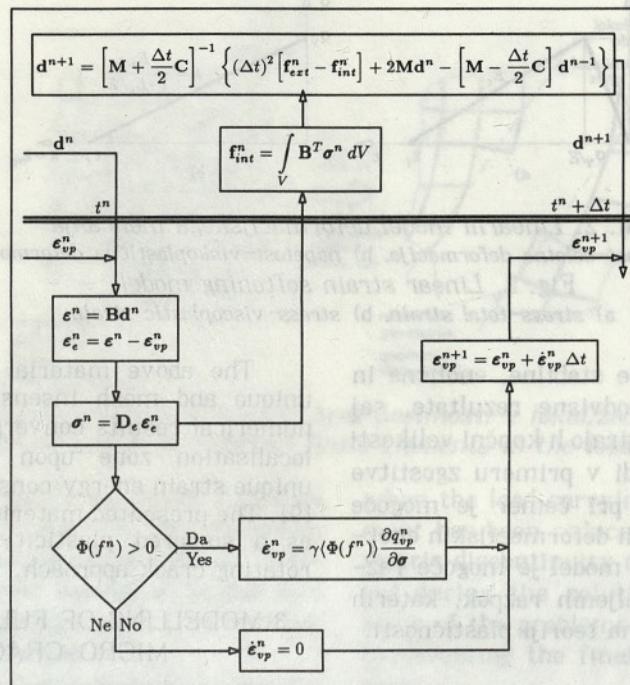
in which exponent N is chosen such that the viscoplastic response of the material fits the available experimental data. For viscoplastic materials under transient loading, both $\Phi(f)$ and γ must reflect the real material properties, and time integration of the viscous effects must be done in the context of real-time.

On violation of the yield criterion $f^n(\sigma^n, Y^n) > 0$, the current viscoplastic strain rate is calculated using eq. (13) and the total viscoplastic strain at the end of the time step can be estimated by the Euler forward scheme with:

The time integration of the governing equations of motion is undertaken in parallel and in relation to the time integration of the viscoplastic constitutive equations as is shown in fig. 1.

The viscoplastic straining history, together with softening rules, defines the strain softening process, which, for the case of isotropic softening, can be modelled with a gradual reduction of the load-carrying capability with increasing viscoplastic strain. The progressive evolution of the yield surface can be defined by relating the equivalent yield stress Y^n to the viscoplastic deformation by means of the softening parameter x , so $Y^n = Y(x^n)$. Here the strain softening hypothesis is adopted, in which the evolution of the softening parameter is postulated [6] as:

where the softening parameter rate is proportional to the second invariant of the viscoplastic strain tensor:



Sl. 1. Postopek definiranja elasto-viskoplastične deformacije v časovnem koraku
Fig. 1. Algorithm for elasto-viscoplastic straining during a time step

Parameter mehčanja je nato mogoče časovno integrirati z uporabo Eulerjeve sheme:

$$\dot{x} = \dot{\epsilon}_{vp} = \sqrt{\frac{2}{3} (\dot{\epsilon}_{vp})^T \dot{\epsilon}_{vp}} \quad (17)$$

Tako je mogoče veličine ϵ_{vp}^{n+1} , Y^{n+1} ter f^{n+1} (σ^{n+1} , Y^{n+1}) vedno ovrednotiti na koncu časovnega koraka Δt , v katerem je prišlo do neelastične deformacije in so vedno znane v vsakem diskretnem trenutku t^n .

Glede na večje število dostopnih podatkov enodimenzionalne odvisnosti napetosti od celotne deformacije, ki so eksperimentalno izmerjeni za različne materiale, je mogoče ugotoviti tudi odvisnost napetosti od neelastičnega dela deformacije. V numeričnem modelu, predstavljenem v tem prispevku, je odvisnost meje plastičnosti od viskoplastične deformacije aproksimirana s preprosto linearno odvisnostjo, kakor je to prikazano na sliki 2. Ob predpostavki, da (17) ustrezno preslikava večdimenzionalno stanje viskoplastičnih deformacij v enodimenzionalni prostor, je mogoče preprosto zapisati enačbo trenutne meje plastičnosti v obliki:

$$Y^n = Y(x^n) = \sigma_Y + h x^n \quad (19)$$

kjer je lahko začetna meja plastičnosti σ_Y enaka natezni ali tlačni meji plastičnosti materiala.

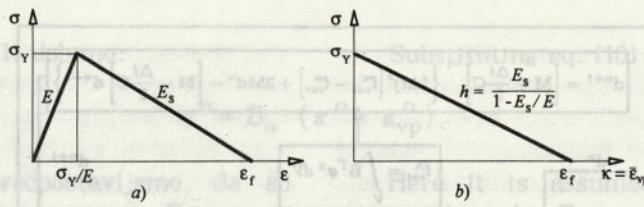
The softening parameter can then be integrated in time by using the Euler forward rule with:

$$x^{n+1} = x^n + \dot{x}^n \Delta t \quad (18)$$

The values of ϵ_{vp}^{n+1} , Y^{n+1} and subsequently f^{n+1} (σ^{n+1} , Y^{n+1}) can thus always be estimated at the end of the time step Δt during which inelastic straining occurs, and are fully defined at any given time instance, t^n .

Considering the availability of simple uniaxial stress-strain diagrams obtained experimentally for different materials, the general relationship between stress and plastic strain can be deduced. The computational model in this paper approximates the dependency of the yield stress on the plastic strain with a simple linear relationship, as shown in fig. 2. Assuming that eq. (17) represents a valid mapping of the multi-axial viscoplastic strain state into the uniaxial space, the current yield stress can then be simply written as:

where the initial yield stress σ_Y can be either the tensile or the compressive yield stress.



Sl. 2. Linearni model deformacijskega mehčanja

a) napetost-celotna deformacija, b) napetost-viskoplastična deformacija

Fig. 2. Linear strain softening model

a) stress-total strain, b) stress-viscoplastic strain

Predstavljen model daje stabilne, enolične in od načina diskretizacije neodvisne rezultate, saj numerični rezultati konvergirajo h končni velikosti lokalizacijskega območja tudi v primeru zgostitve mreže končnih elementov, pri čemer je mogoče opaziti enoličnost porabljenih deformacijskih energij [9]. Predstavljen snovni model je mogoče razvrstiti v kategorijo porazdeljenih razpok, katerih nastanek in rast temeljita na teoriji plastičnosti.

3 MODELIRANJE LOMA TELESA Z MIKRORAZPOKAMI

Širjenje lokalizacijskih območij intenzivnih deformacij vodi do nastanka popolnoma odprtih razpok in tako do strukturne nezveznosti. Modeliranje končne faze procesa širjenja mikrorazpok, to je nastanek popolnoma odprte razpoke, daje v primeru zamisli porazdeljenih razpok pogosto napačne rezultate, saj ta zamisel zahteva zveznost pomikov v poškodovanem območju tudi ob popolni izgubi nosilnosti. Med procesom deformacijskega mehčanja materiala je predpostavka o zveznosti pomikov prek lokalizacijskih območij primerna, čeprav pride do znatnega skoka v polju pomikov na njihovih mejah. Vsekakor je jasna potreba po uvedbi geometrične nezveznosti v primeru nastanka popolnoma odprtih razpok, to je pri lokalni izgubi nosilnosti materiala.

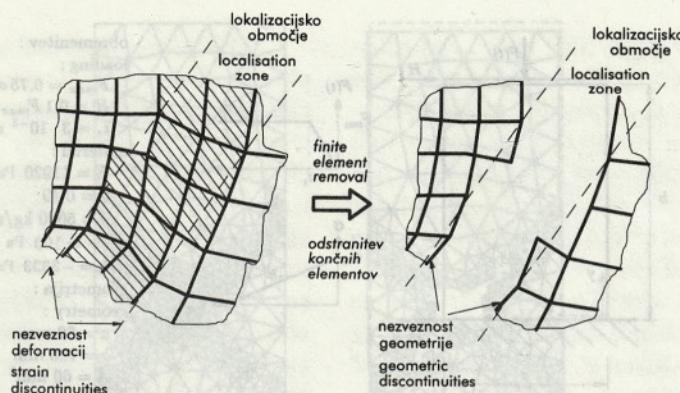
Predpostavimo, da je med numeričnim procesom reševanja dinamičnega problema mogoče na določen način uvesti geometrijsko nezveznost v lokalizacijskem območju, ko pride do popolne izgube nosilnosti materiala v tem območju. Tako je diskretni postopek obravnave razpok dejansko uporabljen v zadnji fazi nastanka razpoke, to je pri odprtju razpoke. Kot mogoč postopek k uvedbi diskretnne porušitve v zamisel porazdeljenih razpok je predlagana razmeroma preprosta tehnika odstranjevanja končnih elementov [10]. Ta tehnika se ujema z zamislico, da je mogoče ugotoviti širjenje razpok v numeričnih analizah lokalizacijskih problemov preprosto s sledenjem poškodovanih točk v diskretiziranem telesu. Temelji na predpostavki, da je mogoč končni element odstraniti iz mreže takoj, ko je njegov proces deformacijskega mehčanja

The above material model produces stable, unique and mesh insensitive results, since the numerical results converge to a finite size of the localisation zone upon mesh refinement, and unique strain energy consumption can be observed [9]. The presented material model can be classified as a smeared plasticity (viscoplasticity) based rotating crack approach.

3 MODELLING OF FULL SEPARATION OF A MICRO-CRACKED SOLID

Propagation of localised zones of intense deformation leads to the development of fully opened cracks and, consequently, to a separation (structural discontinuity). Modelling of the final phase of the microcracking process, i.e. the separation, by smeared crack models very often suffers from a lack of objectivity, since in these models, the displacement continuity over the cracked region is always assumed, even after a complete loss of the load-carrying capability. It is appropriate to assume that the displacement continuity over the localisation zones holds during the softening process, although a jump in the displacement field occurs at the borders of the localisation zone. However, once the cracks have fully developed, i.e. material locally loses its load carrying capability, the clear need for the introduction of a geometric discontinuity can be recognised.

It is assumed that a geometric discontinuity can be introduced during the numerical computation in the localisation zone once the material in this region has lost its load-carrying capability. The discrete crack approach is therefore utilised in the final phase of the failure process, i.e. at full rupture. A relatively simple finite element removal technique [10] is proposed as a possible computational procedure used for the introduction of discrete failure of structures into the smeared crack concept. This technique corresponds well to the idea that crack propagation in localisation analyses can be determined at a macroscopic level simply by following the trajectories of the damaged points in the discretised continuum. The technique is based on the assumption that the finite element can be removed from the mesh as soon as its strain softening process is completed, i.e.



Sl. 3. Odstranitev končnih elementov brez nosilnosti v lokalizacijskem območju
Fig. 3. Removal of fully softened finite elements in the localisation zone

končan, to je pri popolni izgubi nosilnosti končnega elementa (sl. 3). Tako preprosto je med procesom reševanja uvedena geometrijska neveznost, s čimer se je mogoče izogniti določenim problemom simuliranja nastanka odprtne razpoke, ki so značilni za modele porazdeljenih razpok.

Pri uporabi tehnike odstranjevanja končnih elementov v analizah dinamičnih problemov je mogoče pričakovati kršitev energijskega ravnotežja zaradi neupoštevanja zakona o ohranitvi snovi. Ko je element odstranjen iz mreže, je njegov prispevek h globalni kinetični energiji sistema izgubljen, zaradi česar pride do kršitve energijskega ravnotežja. Alternativno pomeni porazdelitev mase odstranjenega elementa na sosednje elemente, vendar se pri tem spremenijo karakteristične oblike deformirana diskretizirane konstrukcije za ceno približne zadovoljivitve energijske bilance. V tem prispevku so mase odstranjениh končnih elementov zanemarjene, kar je fizikalno mogoče pojasniti s procesom zdobitve materiala v lokalizacijskem območju, kar je dejansko mogoče opaziti pri lomnih preizkusih heterogenih materialov [8]. Zdrobljeni material nima nobenega večjega vpliva na nadaljnje obnašanje konstrukcij z razpokami.

4 NUMERIČNI ZGLED

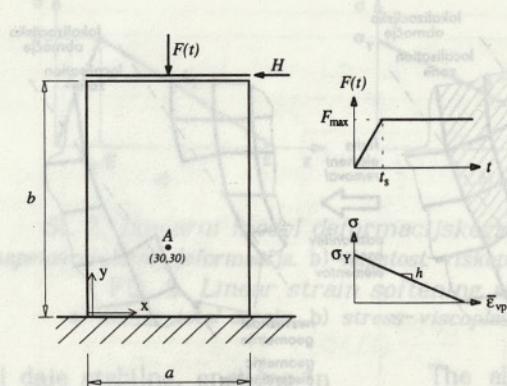
Zgled je udarni dvodimensionalni preizkus, je podan na sliki 4. Preizkušanec je izpostavljen dinamičnemu tlaku in obenem majhni vodoravni obremenitvi na zgornjem robu, kar povzroči nastanek nesimetrične strižne razpoke. Za zagotovitev enakih navpičnih pomikov zgornjega roba preizkušanca je tam predpisana linearna kinematična odvisnost vseh vozlišč v navpični smeri. Predpostavljen je ravninsko deformacijsko stanje, za katerega je mogoče v primeru Misesovega kriterija plastičnosti in ob $\nu = 0.49$ analitično določiti strmino strižnega lokalizacijskega pasu, ki je 45° . Izbrana velikost fluidnostnega parametra $\gamma = 2000 \text{ s}^{-1}$ in izbira potence N v (14) enake 1 da pričakovano širino lokalizacijskega območja $l = 5 \text{ mm}$ [9].

when the load carrying capability of a finite element has been reduced to zero (Fig. 3). The geometric discontinuity can thus be simply introduced during the solution phase, which alleviates some of the problems of smeared crack models in representing the final stages of the failure process.

By applying the finite element removal technique in transient dynamic problems, one can expect to violate the energy balance requirement due to non-compliance with the mass conservation law. When an element is removed from the mesh, the contribution of the removed element's masses to the global kinetic energy is lost, which causes a violation of the energy balance. Distributing the mass of the removed elements to the surrounding remaining elements does represent an alternative, but by doing this the basic mode shapes of the discretised structure change at the cost of a roughly accurate energy balance. It has been chosen in this study to neglect the masses of the removed elements and physically attribute the loss of its mass to the effects of crushing of the material in the localisation zones, which can indeed be observed from fracturing experiments conducted on heterogeneous materials [8]. The crushed material has no significant influence on the further response of fully cracked structures.

4 NUMERICAL EXAMPLE

The example considered is the impact biaxial test given in figure 4. A sample is subjected to a dynamic pressure load at the top of the sample and to a small horizontal load at the upper edge of the specimen, which forces an asymmetric shear band failure pattern. Linear kinematic constraints are used at the top of the sample to insure that all vertical displacements are equal. The plane strain case is assumed, which for the sample with a Mises yield criterion and $\nu = 0.49$ gives an analytically obtainable inclination angle of the shear band of 45° . Taking the fluidity parameter $\gamma = 2000 \text{ s}^{-1}$ and setting power N in (14) to 1 results in $l = 5 \text{ mm}$ [9].



SI. 4. *Udarni dvodimenzionalni preizkus*
Fig. 4. *Impact biaxial test*

Začetne razmere so enake razmeram za neobremenjeno telo v mirovanju.

Pod vplivom dinamične obremenitve se skozi preizkušanec širi vzdolžni val tlačnih napetosti, ki povzroči elastične deformacije. Po odboju od spodnjega, toga vpetega roba se vpadni in odbiti napetostni val seštejeta, pri čemer skupna tlačna napetost preseže ekvivalentno mejo plastičnosti. To povzroči aktiviranje procesa deformacijskega mehčanja po vsej širini preizkušanca, kar povzroči enakomerno izbočitev preizkušanca za kratek čas po odboju. Nato pride do postopnega oblikovanja dveh strižnih pasov intenzivnih deformacij, ki se začneta širiti od obeh spodnjih vogalov pod strmino $+45^\circ$ in -45° proti sredini preizkušanca. Majhna vodoravna sila na zgornjem robu preizkušanca ima za posledico koncentracijo večine deformacij v lokalizacijskem strižnem pasu, ki izhaja iz spodnjega levega vogala.

Numerična analiza dvodimenzionalnega preizkušanca pod udarno obremenitvijo je bila opravljena ob uporabi neurejene mreže paraboličnih trikotnih končnih elementov. Med analizo je bil uporabljen proces prilagodljive določitve velikosti končnih elementov glede na rezultate analize, rezultat česar je zgoščena mreža končnih elementov v območju velikih deformacijskih gradientov (sl. 5a). Zaradi majhne velikosti elementov v lokalizacijskem območju je bil za časovno integracijo uporabljen časovni korak $\Delta t = 1 \cdot 10^{-7}$ s, ob 7-točkovni ploskovni integraciji trikotnega elementa. Končni elementi so bili odstranjeni iz mreže takrat, ko je nosilnost vseh vzorčnih (integracijskih) točk elementa ($n = 7$) izginila.

Slika 5b prikazuje deformirano mrežo z odstranjenimi elementi pri času $t = 0,30$ ms, medtem ko slika 6 nazorno prikazuje nastanek in širjenje diskretnih razpok zaradi odstranitve elementov med postopkom numeričnega reševanja problema. Očitno je, da večanje razpok pravilno sledi širjenju območja popolne izgube nosilnosti v lokalizacijskem območju.

obremenitve :
loading :

$$F_{max} = 0,75 \sigma_Y A$$

$$H = 0,1 F_{max}$$

$$t_s = 3 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

material :

$$E = 11920 \text{ Pa}$$

$$\nu = 0,49$$

$$\rho = 5000 \text{ kg/m}^3$$

$$\sigma_Y = 100 \text{ Pa}$$

$$h = -3333 \text{ Pa}$$

geometrija :

$$a = 60 \text{ mm}$$

$$b = 120 \text{ mm}$$

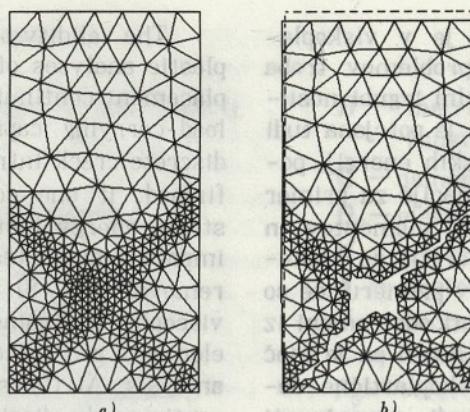
$$A = 60 \text{ mm}^2$$

The initial conditions correspond to that of an unloaded body at rest.

Under dynamic loading, the longitudinal pressure wave propagates in an elastic manner through the sample. After reflection at the lower, fixed boundary, the incoming and returning pressure waves are added together and the resulting stress violates the yield criterion. This causes the initiation of the strain softening process over the total width of the sample and the sample starts to bulge for a short time after reflection. A gradual development of two shear bands of intensive deformation then occurs, which start to propagate from both lower corners under the inclination angles $+45^\circ$ and -45° towards the centre of the sample. As a result of the small horizontal force at the upper edge of the sample, the deformation concentrates in the shear band propagating from the lower left corner.

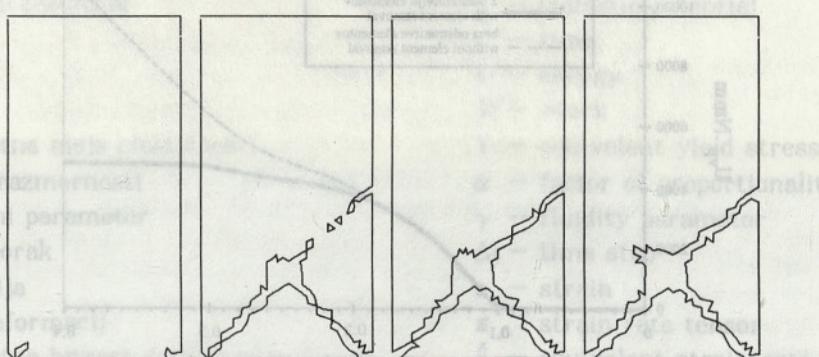
The analysis of a biaxial specimen under impact loading was performed using unstructured meshes with quadratic triangular elements. The mesh adaptivity process was used in the solution phase, which resulted in a fine mesh in the region of high deformation gradients (Fig. 5a). Due to small element sizes in the localisation zone a time step $\Delta t = 1 \cdot 10^{-7}$ s was used for the time integration procedure and 7 point element spatial integration was utilised. The finite elements were assumed to have been removed from the mesh when all sampling (i.e. integration) points in the element ($n = 7$) have lost their load carrying capability.

Figure 5b shows the deformed shape of the remaining finite elements at time $t = 0.30$ ms, while figure 6 illustrates the emergence and propagation of discrete crack due to element removal during the solution phase. Obviously, the propagating crack correctly follows the extension of the completely softened region in the localisation zone.



Sl. 5. Začetna mreža in deformirana mreža z odstranjenimi elementi
a) začetna mreža, b) deformirana mreža pri $t = 0.30$ ms

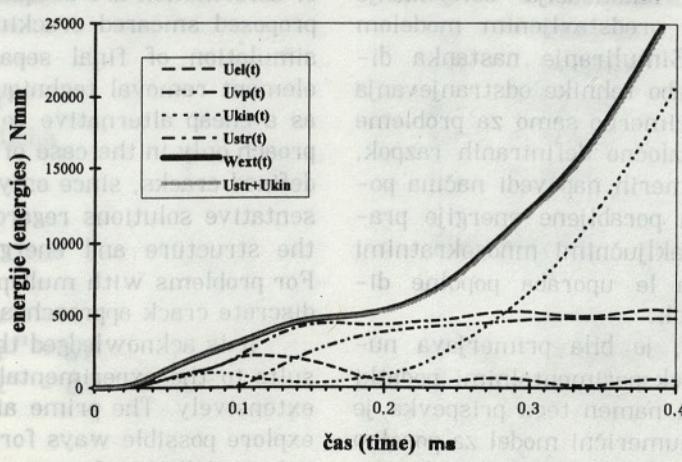
Fig. 5. Initial mesh and deformed mesh with removed elements
a) initial mesh, b) deformed mesh at $t = 0.30$ ms



Sl. 6. Širjenje razpok med procesom reševanja
 $t = 0.10$ ms, $t = 0.20$ ms, $t = 0.25$ ms, $t = 0.30$ ms

Fig. 6. Progressive fracturing during the solution process
 $t = 0.10$ ms, $t = 0.20$ ms, $t = 0.25$ ms, $t = 0.30$ ms

Slike 7 je mogoče razbrati, da pride v preizkušancu po popolni ločitvi na dva dela ob času $t = 0.30$ ms do pravilnega elastičnega razbremenjevanja obeh delov, pri čemer še vedno delajoča stalna obremenitev na zgornjem robu preizkušanca povzroči le translatorno, enakomerno pospešeno gibanje odlomljenega zgornjega dela preizkušanca.



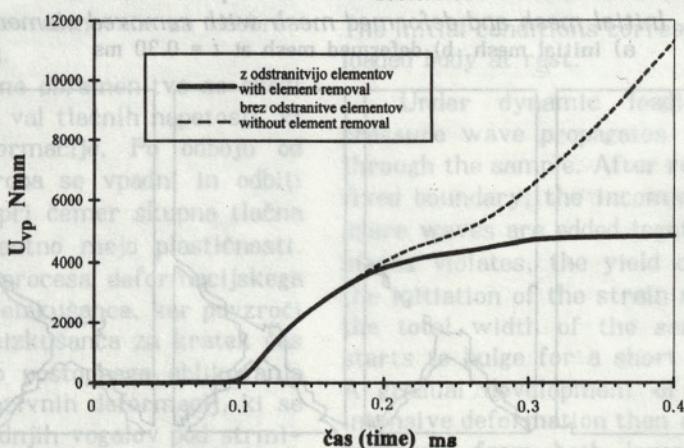
Sl. 7. Histogram energij v preizkušancu

Fig. 7. History of total energies in the specimen

As can be observed from figure 7, the specimen correctly undergoes elastic unloading on full separation achieved at time $t = 0.30$ ms, after which the constant external load still acting on the upper boundary of the specimen is used only for the translational, constantly accelerated motion of the separated upper part of the specimen.

Pravilnost predpostavke, da je v viskoplastičnih analizah lokalizacijskih problemov treba opustiti zveznost pomikov ob popolni izgubi nosilnosti in uvesti diskretno razpoko, je potrjena tudi ob primerjavi razvoja deformacijskih energij, porabljenih za viskoplastične deformacije za primer analize z odstranjevanjem končnih elementov in brez njega (sl. 8). Porabljena energija za viskoplastične deformacije je omejena v primeru, če so elementi s popolno izgubo nosilnosti odstranjeni iz mreže med procesom reševanja. Hkrati pa je moč opaziti, da poraba energije za viskoplastične deformacije nerealno narašča zaradi navzočnosti viskoplastičnih deformacij, če so takšni elementi ohranjeni v mreži.

The validity of the assumption that in viscoplastic analyses of localisation problems the displacement continuity should be dropped when the load-carrying capability reduces to zero and a discrete crack introduced instead, is further confirmed, if one compares the total viscoplastic strain energy histories for the analyses of the impact biaxial test with and without element removal (Fig. 8). Energy dissipation due to the viscoplastic strains is limited if the fully softened elements are removed from the mesh during the analysis. At the same time, the energy is being continuously dissipated in the localisation zones due to viscoplastic effects if the fully softened elements are retained in the mesh.



Sl. 8. Primerjava deformacijskih energij za viskoplastične deformacije

Fig. 8. Comparison of total dissipated viscoplastic energies

5 SKLEP

Tipičen primer nastanka in širjenja razpok v podanem numeričnem zgledu nazorno ponazarja možnosti predstavljenega numeričnega modela. Na podlagi obširnega numeričnega eksperimentiranja [9] je mogoče sklepati, da sta proces deformacijskega mehčanja in lokalizacija deformacije primerno simulirana s predstavljenim modelom porazdeljenih razpok. Simuliranje nastanka diskretne razpoke z uporabo tehnike odstranjevanja končnih elementov je primerno samo za probleme z manjšim številom razločno definiranih razpok, saj so le v takšnih primerih napovedi načina porušitve konstrukcije in porabljeni energije pravilne. Za probleme z naključnimi mnogokratnimi razpokami je primerna le uporaba popolne diskretne obravnave razpok.

Kakor je razvidno, je bila primerjava numeričnih rezultatov z eksperimentalnimi podatki zanemarjena. Poglavitni namen tega prispevka je predstaviti gospodarni numerični model za popolno simuliranje nastanka in širjenja razpok pod vplivom dinamične obremenitve.

5 CONCLUSIONS

The typical example of progressive fracturing presented above illustrates the possibilities of the proposed computational model. Extensive numerical experimentation [9] has shown, that the softening process and consequently the localisation of deformation are adequately simulated with the proposed smeared cracking model. However, the simulation of final separation using the finite element removal technique may be recommended as a cheap alternative to the discrete crack approach only in the case of a small number of well defined cracks, since only in this case are representative solutions regarding the failure mode of the structure and energy consumption obtained. For problems with multiple random cracking, full discrete crack approaches should be used.

It is acknowledged that the tuning of the results to the experimental data has not been done extensively. The prime aim of this study was to explore possible ways for economical computational modelling of progressive fracturing under transient dynamic conditions.

UDK 519.8 6 UPORABLJENI SIMBOLI

LITERATURA
REFERENCES

6 NOTATIONS

B – matrika odvodov interpolacijskih funkcij	B – matrix of derivatives of interpolation functions,
C – dušilna matrika	C – damping matrix
D_e – elastična konstitutivna matrika	D_e – elasticity matrix
d – vektor vozliščih pospeškov	d – vector of nodal accelerations
d – vektor vozliščnih hitrosti	d – vector of nodal velocities
d – vektor vozliščnih pomikov	d – vector of nodal displacements
E – modul elastičnosti	E – Young's modulus
F ₀ – referenčna funkcija meje plastičnosti	F ₀ – reference yield function
f – vektor vozliščnih sil	f – vector of nodal forces
f – funkcija kriterija plastičnosti	f – yield function
h – modul mehčanja	h – softening modulus
M – masna matrika	M – mass matrix
q – neelastični potencial	q – inelastic potential
t – čas	t – time
U – energija	U – energy
W – delo	W – work
Y – ekvivalentna meja plastičnosti	Y – equivalent yield stress
α – faktor sorazmernosti	α – factor of proportionality
γ – fluidnostni parameter	γ – fluidity parameter
Δt – časovni korak	Δt – time step
ε – deformacija	ε – strain
$\dot{\varepsilon}$ – hitrost deformacij	$\dot{\varepsilon}$ – strain rate tensor
$\ddot{\varepsilon}$ – ekvivalentna hitrost deformacije	$\ddot{\varepsilon}$ – equivalent strain rate
x – parameter mehčanja	x – softening parameter
v – Poissonovo število	v – Poisson's ratio
ρ – gostota snovi	ρ – density
σ – napetost	σ – stress
σ – napetostni tenzor	σ – stress tensor
σ_Y – enodimensionalna meja plastičnosti	σ_Y – uniaxial yield stress

Spodnji indeksi

<i>e, el</i>	– elastično
<i>vp</i>	– viskoplastično
<i>ustre</i>	– notranje
<i>Int</i>	– notranje
<i>ext</i>	– zunanje
<i>kin</i>	– kinetična
<i>str</i>	– deformacijska
<i>f</i>	– mejna

Zgornji indeksi

<i>n</i>	– pri času t^n
<i>n + 1</i>	– pri času $t^n + \Delta t$
<i>n - 1</i>	– pri času $t^n - \Delta t$

Subscripts

<i>e, el</i>	– elastic
<i>vp</i>	– viscoplastic
<i>Int</i>	– internal
<i>ext</i>	– external
<i>kin</i>	– kinetic
<i>str</i>	– strain
<i>f</i>	– limit

Superscripts

<i>n</i>	– at time t^n
<i>n + 1</i>	– at time $t^n + \Delta t$
<i>n - 1</i>	– at time $t^n - \Delta t$

Pravilnost pravila očitovanja je v viskoelastičnih analizah lokalizacijskih problemov. Analiza je način, da se izognese zveznosti, ki povezujejo različne elemente, ko se obnovi element, ki je dosegel nulto napetost. To je učinkovito, ker se tako smanjuje razdalja med elementi, ki so v celoti vplivani na rezultate. Tako se v celoti vpliv na rezultate smanjuje.

7 LITERATURA

7 REFERENCES

- [1] Belytschko, T.–Hughes, T.J.R.(eds): *An Overview of Semidiscretization and Time Integration Procedures. Computational Methods for Transient Analysis*. North-Holland, 1983.
- [2] De Borst, R.: *Smeared Cracking, Plasticity, Creep, and Thermal Loading – A Unified Approach*. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 62, 1987, 89–110.
- [3] De Borst, R.–Mühlhaus, H.–Pamin, J.–Sluys, L.J.: *Computational Modelling of Localisation of Deformation*. Proc. 3rd Int. Conf. on Comp. Plast. (COMPLAS III), Pineridge Press, Swansea, 1992, 483–508.
- [4] Hinton, E.–Rock, T.–Zienkiewicz, O.C.: *A Note on Mass Lumping and Related Processes in the Finite Element Method*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 4, 1976, 245–249.
- [5] Hitchings, D.: *A Finite Element Dynamics Primer*. NAFEMS UK, Glasgow, 1992.
- [6] Owen, D.R.J.–Hinton, E.: *Finite Elements in Plasticity*. Pineridge Press Limited, Swansea, 1980.
- [7] Perzyna, P.: *Fundamental Problems in Viscoplasticity. Recent Advances in Applied Mechanics*, 9, 1966, 243–377.
- [8] Read, H.E.–Hegemier, G.A.: *Strain Softening of Rock, Soil and Concrete – A Review Article*. Mechanics of Materials, 3, 1984, 271–294.
- [9] Ren, Z.: *Progressive Fracturing under Dynamic Loading Conditions*. PhD Thesis. University College Swansea, 1993.
- [10] Ren, Z.–Bičanić, N.: *Finite Element Removal Technique in Transient Dynamic Problems with Localisation*. Proc. 7th World congress on Finite Element Methods (FEM'93). Robinson and Associates, 1993, 75–81.
- [11] Skrikerud, P.E.–Bachmann, H.: *Discrete Crack Modelling for Dynamically Loaded, Unreinforced Concrete Structures*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 14, 1986, 297–315.

Avtorjev naslov: dr. Zoran Ren, dipl. inž.

Fakulteta za strojništvo

skretne raziske z Univerze v Mariboru

konečnih elementov

z manjšim številom

sej so je v takih

rušitve konstrukcij

više. Za probleme

raziskovali je primarni

prof. dr. Nenad Bičanić, dipl. inž.

Univerza v Glasgow

Oddelek za gradbeništvo

Glasgow

Velika Britanija

Kakor je razvidno na numeričnih rezultatah, je numerični model ustrezno

z eksperimentalnimi podatki

Poglaviti namen tega prispevka je

način, da se izognese zveznosti

v nastanku in spletjanju razlok pod vplivom dinamične obremenitve.

Prejeto: 9.12.1994

Received:

Author's Address: Dr. Zoran Ren, Dipl. Ing.

Faculty of Mechanical Engineering

University of Maribor

Smetanova 17

62000 Maribor, Slovenia

Prof. Dr. Nenad Bičanić, Dipl. Ing.

University of Glasgow

Department of Civil Engineering

Rankine Building

Glasgow G12 8LT

Great Britain

Sprejeto: 21.12.1994

Accepted: