

Model utrujanja zobnih bokov z upoštevanjem parametrov mehanike loma

A Fracture Mechanics Model of Gear Flanks Fatigue

Nastanek utrujenosti na pomenljivejših faz v procesu razvoja kritične dolžine razpoke in početka razvoja kratkih razpok.

SREČKO GLODEŽ - JOŽE FLAŠKER

V prispevku je predstavljen nov model za preračun zobnikov glede na jamičenje zobnih bokov. Za analizo nastanka in širjenja utrujenostne razpoke v dotikalnem področju je uporabljen nadomestni model dveh valjev, katerih polmera ustreza krvinskim polmeroma zobnih bokov v poljubni opazovani točki na ubirnici. Napetostno polje v dotikalnem področju in odvisnost faktorja intenzivnosti napetosti od dolžine razpoke sta določena z metodo končnih elementov. Po rezultatih numerične analize in po materialnih parametrih zobnikov je določena doba trajanja zobnih bokov kot vsota potrebnega števila obremenitvenih ciklov za nastanek razpoke in potrebnega števila obremenitvenih ciklov za razširitev te razpoke od začetne do kritične dolžine. V modelu je za opis nastanka razpoke uporabljen teorija gibanja dislokacij na ponavlajočih se drsnih ravneh, medtem ko je za opis širjenja razpoke uporabljen teorija kratkih razpok, kjer ima zelo pomembno vlogo predvsem mikrostruktura materiala.

Predstavljen model je uporabljen za določitev dobe trajanja valjaste zobniške dvojice z ravnimi zobi, na kateri so bili opravljeni tudi praktični preizkusi. Primerjava numeričnih in eksperimentalnih rezultatov kaže dobro ujemanje. Na podlagi tega lahko sklepamo, da je predstavljeni model primeren za preračun zobnikov glede na jamičenje zobnih bokov, čeprav bo treba model še dopolniti z dodatnimi teoretičnimi, numeričnimi in predvsem eksperimentalnimi raziskavami.

Ključne besede: zobniki, izračuni, modeli preračuna, mehanika loma, utrujanje zobnih bokov

A new model for determination of the fatigue pitting resistance of gear flanks is presented in this paper. An equivalent model of two cylinders, with diameters equal to the appropriate curvature radii of gear flanks at any point on the engagement line, is used to study the process of fatigue crack initiation and crack propagation in the contact area. The stress field in the contact area and dependence of the stress intensity factor on the crack length are determined by the finite element method. On the basis of numerical results and with consideration of some particular material parameters, the service life of gear flanks can then be determined as the sum of the number of stress cycles required for crack initiation and the number of stress cycles required for a crack to propagate from the initial to the critical crack length. In this model the theory of dislocation motions on persistent slip is used to describe the process of crack initiation. The crack growth is described using the short crack growth theory, in which the microstructure of a material plays an important role.

The model presented is used for determination of the service life of a real spur gear pair which has been also experimentally tested. The comparison of the numerical and experimental results is in a good agreement. It can be concluded that the model presented is appropriate for calculation of the pitting resistance of gear flanks. However, the model could be still further improved by some additional theoretical, numerical and above all, experimental research.

Keywords: gears, calculations, calculation models, fracture mechanics, gears flanks fatigue

0 UVOD

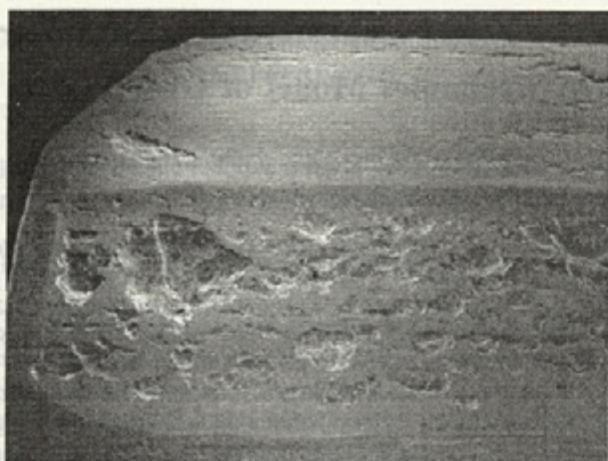
Na zobnikih sta v praksi zaradi utrujanja materiala pri ponavlajoči se obremenitvi znani predvsem dve poškodbi: jamičenje zobnih bokov in zlom zoba v korenju [1] do [3]. V predloženem delu je obravnavano jamičenje zobnih bokov, pri čemer je predstavljen numerični model za določitev dobe trajanja zobnih bokov glede na jamičenje. Jamičenje se kaže v obliki majhnih jamic na površini zobnih bokov, kakor to prikazuje slika 1.

Za določitev odpornosti zobnih bokov proti jamičenju se dandanes v praksi uporabljajo predvsem standardni postopki (DIN, AGMA, ISO itn.), ki so zasnovani na primerjalni analizi med dejanskim bočnim tlakom na razdelnem krogu ali notranji točki enojnega

0 INTRODUCTION

Two kinds of tooth damage can occur on gears under repeated loading due to material fatigue- the pitting of gear teeth flanks and teeth breakage in the tooth root [1] to [3]. In this study, however, only the pitting phenomenon is addressed and the developed numerical model is used for determination of pitting resistance, i.e. the service life of gear teeth flanks. The pitting of gear teeth flanks is characterised by the occurrence of small pits on the surface, as shown in figure 1.

Several classical standardised procedures (DIN, AGMA, ISO, etc.) can be used for the approximate determination of the pitting resistance of gear teeth flanks. They are commonly based on the comparison of the contact stress σ_c at the pitch point or at the



Sl. 1. Pojav jamičenja na zobnih bokih
Fig. 1. Pitting phenomenon on gear teeth flanks

ubiranja σ_H in dopustnim bočnim tlakom σ_{HP} . Dejanski bočni tlak mora biti v tem primeru manjši od dopustnega bočnega tlaka ($\sigma_H < \sigma_{HP}$). Dejanski in dopustni bočni tlak sta odvisna od številnih vplivnih koeficientov, ki ustrezajo dejanskim obratovalnim razmeram zobiške dvojice (dodatne notranje in zunanje dinamične obremenitve, slika nošenja ubirajočih zobiškov, material zobiškov, površinska hrapavost itn.). Najpomembnejša vplivna veličina pri določanju dopustnega bočnega tlaka je trajna bočna trdnost materiala zobiškov σ_{Hlim} , ki je definirana kot največji dejanski bočni tlak na zobe zobiškov, pri katerem po določenem številu obremenitvenih ciklov ne bo prišlo do poškodb zobišnih bokov zaradi jamičenja [1]. Trajna bočna trdnost je torej materialna veličina, ki jo določimo s preizkusi na referenčnih zobiških dvojicah. Zgoraj omenjeni standardni računski postopki temelijo izključno na preizkusih na referenčnih zobiških, pri čemer upoštevajo le končno stanje v procesu utrujanja zobišnih bokov, ko se poškodbe že pojavi. Celoten proces utrujanja materiala vsebuje še druge faze in ga lahko razdelimo na:

- gibanje in kopiranje dislokacij,
- nastanek razpoke,
- širjenje razpoke,
- nastanek končnih okvar.

V tem prispevku je predstavljen nov numerični model, ki upošteva vse štiri faze utrujenostnega procesa in tako pomeni bolj realistično določitev odpornosti zobišnih bokov na jamičenje. Model je primeren tudi za preračun drugih strojnih elementov, ki obratujejo v podobnih razmerah, saj upošteva različne kombinacije kotalnega in drsnega gibanja dotikajočih se površin. Na tej podlagi lahko določimo potrebno število obremenitvenih ciklov N za pojav jamičenja na zobišnih bokih kot vsoto potrebnega števila obremenitvenih ciklov N_f za nastanek utrujenostne razpoke in potrebnega števila obremenitvenih ciklov N_g za razširitev te razpoke od začetne do kritične dolžine, ko se pojavi nenadzorovana nadaljnja rast razpoke:

$$N = N_f + N_g \quad (1)$$

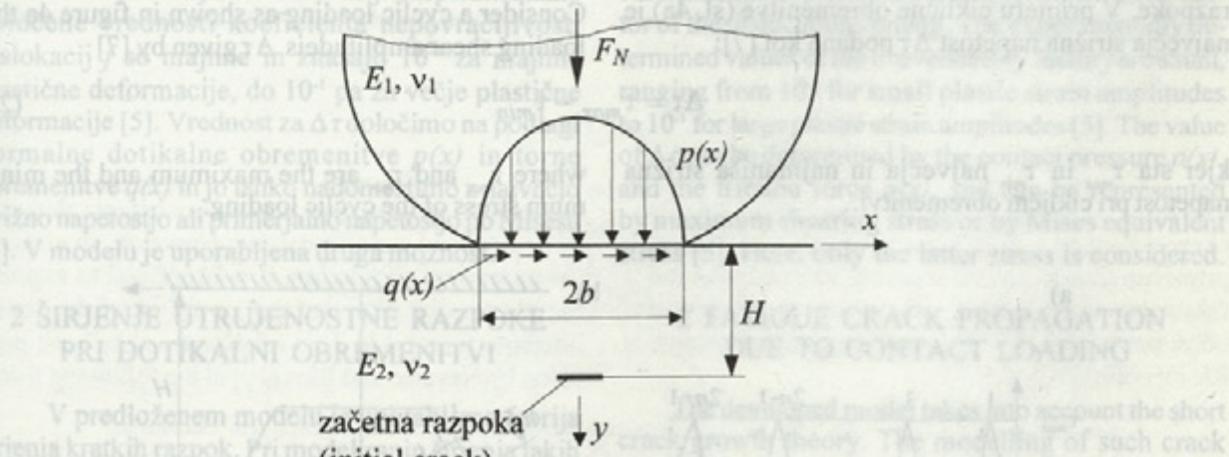
inner point of a single tooth pair engagement, with the permissible contact stress of the gear material σ_{HP} . The contact stress must be lower than or equal to, the permissible contact stress ($\sigma_H < \sigma_{HP}$). The stress determination depends on a number of different coefficients that allow for proper consideration of real working conditions (additional internal and external dynamic forces, contact area of engaging gears, gear material, surface roughness, etc.). The most important parameter, when determining the permissible contact stress, is the reference contact stress of the gear material σ_{Hlim} , which is defined as the maximum stress that can be applied to gear teeth flanks for a certain number of stress cycles without the danger of the pitting occurrence [1]. The reference contact stress is a material parameter, which can be determined by experimental testing of reference gears. The standard procedures are exclusively based on the experimental testing of the reference gears and they relate only to the final stage of the fatigue process in the gear contact area, i.e. the occurrence of pitting. However, the complete fatigue process of metal materials actually consists of the following stages:

- travelling and build-up of dislocations,
- crack initiation,
- crack growth,
- the occurrence of final failure.

In this study a new numerical model is presented, which considers all four stages of the fatigue process and therefore provides for a more reliable determination of the pitting resistance of gear teeth flanks, or any other mechanical element subject to similar working conditions. The model also takes into account the varying combinations of rolling and sliding contact conditions, which are characteristic of gears. In this way the number of stress cycles N , required for pitting on gear flanks to occur, can be determined from the number of stress cycles N_f required for fatigue crack initiation and the number of stress cycles N_g required for a crack to propagate from the initial to the critical crack length, when uncontrolled crack growth is expected:

I NASTANEK UTRUJENOSTNE RAZPOKE PRI DOTIKALNI OBREMENITVI

Nastanek utrujenostnih razpok je ena od najpomembnejših faz v procesu utrujanja materiala. Lega in način nastanka utrujenostne razpoke sta odvisna od mikrostrukture materiala, napetosti ter mikro in makro geometrijske oblike elementa [4]. V splošnem pride do nastanka utrujenostne razpoke na mestu največje napetosti v materialu. Glede na različne kombinacije drsnega in kotalnega gibanja elementov v kontaktu je lahko čas nastanka razpoke zelo različen, razpoka pa se lahko pojavi na dotikalni površini ali pod njo (sl. 2) [5]. Razpoke, nastale v globini H od 0 do 2 μm , so označene kot površinske razpoke. Ko je H enak 2 μm do 0,4 b , govorimo o podpovršinskih razpokah (b je polovična širina dotikalne ploskve). Nastanek razpok v globini, večji od 0,4 b , označimo kot notranje razpoke, saj postane robni pogoj dotikalne površine zanemarljiv. V primeru dobrega mazanja (majhen koeficient trenja) se pojavi največja primerjalna napetost zaradi dotikalne obremenitve ubirajočih se zobnikov vedno v določeni globini pod dotikalno površino, kjer lahko pričakujemo tudi nastanek začetnih utrujenostnih razpok. Za primer, ko je koeficient trenja $\mu < 0,05$, se pojavi največja primerjalna napetost v globini približno $H=0,7b$ pod dotikalno površino [6]. To pomeni, da lahko v tem primeru zanemarimo vpliv robnega pogoja površine in nadalje obravnavamo teorijo nastanka notranjih razpok v materialu.



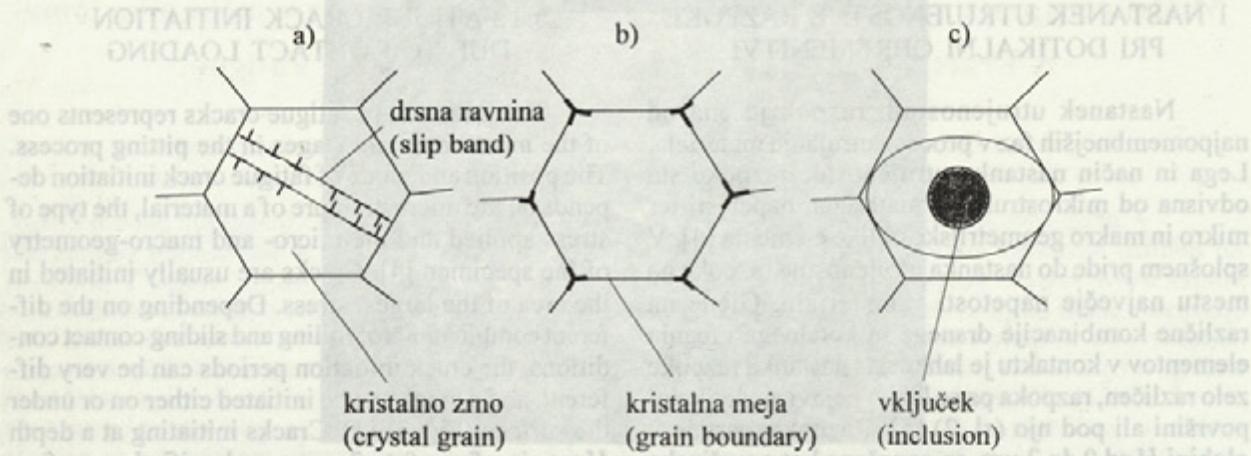
Sl. 2. Nastanek utrujenostne razpoke pri kontaktni obremenitvi
Fig. 2. Fatigue crack initiation under contact loading

Z vidika mikrostrukture materiala lahko nastanejo razpoke vzdolž drsnih ravnin pri gibanju dislokacij, vzdolž kristalnih mej ali ob vključkih v materialih (sl. 3) [4]. V tem prispevku je uporabljena teorija nastanka razpok vzdolž kristalnih mej.

I FATIGUE CRACK INITIATION DUE TO CONTACT LOADING

The initiation of fatigue cracks represents one of the most important stages in the pitting process. The position and mode of fatigue crack initiation depends on the microstructure of a material, the type of stress applied and the micro- and macro-geometry of the specimen [4]. Cracks are usually initiated in the area of the largest stress. Depending on the different combinations of rolling and sliding contact conditions, the crack initiation periods can be very different, and a crack can be initiated either on or under the surface (Fig. 2) [5]. Cracks initiating at a depth H ranging from 0 to 2 μm are classified as surface cracks. Cracks initiating at a depth from 2 μm to 0,4 b are called subsurface cracks (b is the half-width of the contact area). Cracks initiating at depths greater than 0,4 b correspond to the regimes of internal crack initiation, since the boundary effects are negligible. Under favourable lubrication conditions (small coefficient of friction) the maximum equivalent stress due to the contact of matching gears is always sited at a certain depth under the contacting surfaces, where the initial cracks can be expected to appear. In cases when the coefficient of friction is $\mu < 0,05$, the position of the maximum equivalent stress is approximately $H=0,7b$ under the contact surface [6]. This means that the boundary effects can be neglected in this case and the internal crack initiation theory can be applied.

From the standpoint of the microstructure of the material, microcracks can be initiated along slip bands by dislocation motion, along grain boundaries, or along inclusion interfaces (Fig.) 3 [4]. In this paper the theory of fatigue crack initiation along slip bands is used.



Sl. 3. Fizikalni načini nastanka utrujenostne razpoke

a) vzdolž drsnih ravnín, b) vzdolž kristalnih mej, c) ob vključkih v materialu

Fig. 3. The physical modes of fatigue crack initiation

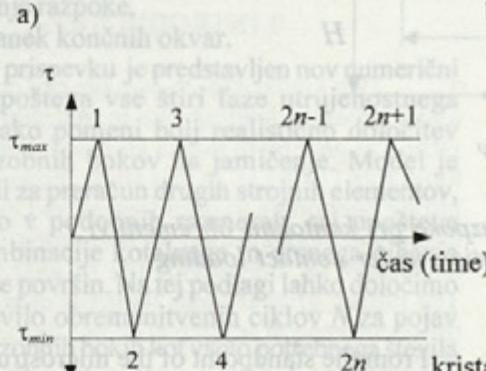
a) along slip bands, b) along grain boundaries, c) along inclusion interface

1.1 Nastanek mikrorazpok vzdolž drsnih ravnín

V prispevku je za določitev potrebnega števila obremenitvenih ciklov N_f za nastanek utrujenostnih razpok vzdolž drsnih ravnín uporabljena teorija proste Gibbsove energije, ki je dejansko razlika med akumulirano energijo dislokacij in energijo v trenutku nastanka razpoke [5] in [7]. Po zgoraj omenjeni teoriji zavzame prosta Gibbsova energija največjo vrednost pri kritičnem številu obremenitvenih ciklov, ki je definirano kot potrebno število ciklov N_f za nastanek razpoke. V primeru ciklične obremenitve (sl. 4a) je največja strižna napetost $\Delta\tau$ podana kot [7]:

$$\Delta\tau = \tau_{max} - \tau_{min} \quad (2)$$

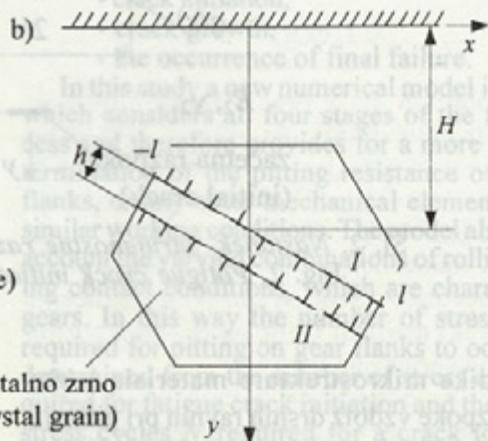
kjer sta τ_{max} in τ_{min} največja in najmanjša strižna napetost pri ciklični obremenitvi.

Sl. 4. Model drsne ravnine v kristalnem zrnu
a) uporabljen vzorec napetosti,Fig. 4. The model of the slip band in crystal grain
a) applied stress pattern, b) slip band

1.1 Microcrack initiation along slip bands

Here the concept of Gibb's free energy change - from a state of dislocation dipole accumulation along a slip layer (persistent slip band- PSB) to a state of crack initiation along this layer - is used for the determination of stress cycles N_f required for fatigue crack initiation [5] and [7]. In some theoretical assumptions, Gibb's free energy change achieves a maximum value at a critical number of cyclic loading which is defined as the crack initiation cyclic number N_f . Consider a cyclic loading as shown in figure 4a the loading shear amplitude is $\Delta\tau$ given by [7]

where τ_{max} and τ_{min} are the maximum and the minimum stress of the cyclic loading.



Glede na navedene predpostavke sta Mura in Nakasone predlagala analitični model za določitev potrebnega števila obremenitvenih ciklov za nastanek utrujenostne razpoke, ki temelji na teoriji gibanja dislokacij na ponavljajočih se drsnih ravninah (slika 4b) in dejansko opisuje spremembe v mikrostrukturi materiala pri delujoči obremenitvi. V modelu je prosta Gibbsova energija definirana kot [7]:

$$\Delta G = -W_1 - W_2 + 2a_o \gamma \quad (3)$$

kjer je W_1 akumulirana deformacijska energija dislokacij po N obremenitvenih ciklih in W_2 sproščena mehanska energija za odprtje začetne razpoke dolžine a_o . Ustrezne enačbe za določitev energij W_1 in W_2 navajata Mura in Nakasone v ustrezni strokovni literaturi [7]. γ je površinska energija razpoke in lahko zavzame vrednosti 1 N/m za zelo krhke materiale oziroma 10^3 N/m za zelo žilave materiale. Potrebno število obremenitvenih ciklov N_o za nastanek utrujenostne razpoke potem določimo z minimiziranjem proste Gibbsove energije glede na število obremenitvenih ciklov $\partial \Delta G / \partial N = 0$, kar da [7]:

$$N_o = \frac{\gamma}{h \left[\log \frac{8l}{h} - \frac{3}{2} \right] (\Delta \tau - 2\tau_f)} \cdot \frac{2-f}{f} \quad (4)$$

kjer so: $\Delta \tau = \tau_{max} - \tau_{min}$ amplitudna strižna napetost na drsnih ravninah, τ_f kritična strižna napetost materiala, h - širina drsne ravnine, $2l$ - dolžina drsne ravnine in f koeficient nepovračljivosti dislokacij. Eksperimentalno določene vrednosti koeficiente nepovračljivosti dislokacij f so majhne in znašajo 10^{-4} za majhne plastične deformacije, do 10^{-1} pa za večje plastične deformacije [5]. Vrednost za $\Delta \tau$ določimo na podlagi normalne dotikalne obremenitve $p(x)$ in torne obremenitve $q(x)$ in jo lahko nadomestimo z največjo strižno napetostjo ali primerjalno napetostjo po Misesu [5]. V modelu je uporabljena druga možnost.

2 ŠIRJENJE UTRUJENOSTNE RAZPOKE PRI DOTIKALNI OBREMETITVI

V predloženem modelu je uporabljena teorija širjenja kratkih razpok. Pri modeliranju širjenja takih razpok moramo upoštevati blokiranje drsne ravnine dislokacij na kristalnih mejah in možnosti za nastanek novih drsnih ravnin v naslednjem kristalnem zrnu. Po tem sklepamo, da ima širjenje kratkih razpok nevezen karakter, kar je hkrati temeljnega pomena v predloženi teoriji. V vsakem kristalnem zrnu se hitrost širjenja razpoke zmanjšuje s približevanjem razpoke kristalni meji. V trenutku, ko pride zaradi koncentracije napetosti pred razpoko do nastanka nove drsne ravnine v naslednjem kristalnem zrnu, se hitrost širjenja razpoke ponovno poveča. Tako so v začetni

Following this assumption, Mura and Nakasone proposed an analytical model for determining the number of stress cycles required for fatigue crack initiation, which is based on the theory of dislocation motion on persistent slip bands (Figure 4b), and which also describes the changes in the material microstructure due to the applied load. In their model, the Gibbs's free-energy is given by [7]:

where W_1 is the accumulated strain energy of dislocations after N cycles of loading, W_2 is the mechanical energy release due to the opening up of an embryonic initial crack a_o . Appropriate equations for evaluation of energies W_1 and W_2 have been provided by Mura and Nakasone [7]. γ is the surface energy of the crack and can take the values between 1 N/m for very brittle materials and 10^3 N/m for very tough materials. The number of stress cycles N_o required for the crack initiation is obtained from the minimisation of Gibb's free energy in relation to the number of stress cycles $\partial \Delta G / \partial N = 0$, which results in [7]:

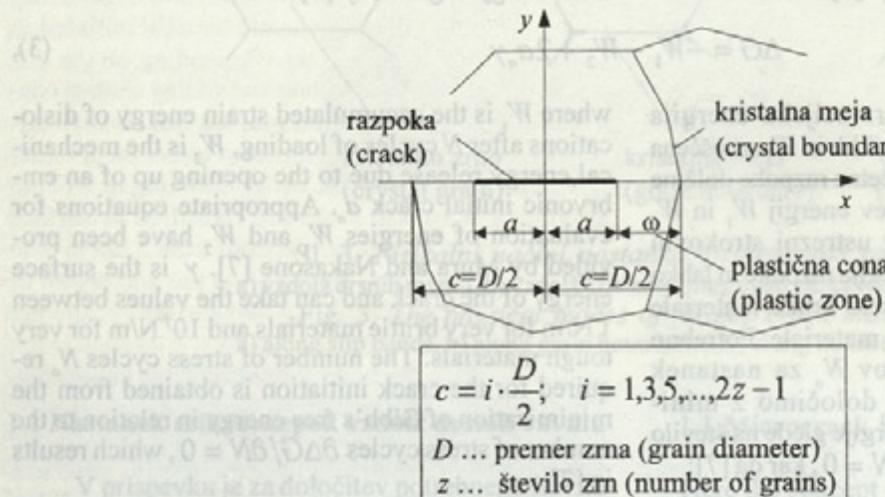
where $\Delta \tau = \tau_{max} - \tau_{min}$ is the applied stress amplitude on the slip layer, τ_f is the frictional stress of the material, h is the width of the slip band, $2l$ is the length of the dislocations pileup, and f is the irreversibility factor of the dislocations pileup. The experimentally determined values of the irreversibility factor f are small, ranging from 10^{-4} for small plastic strain amplitudes to 10^{-1} for large plastic strain amplitudes [5]. The value of $\Delta \tau$ can be determined by the contact pressure $p(x)$, and the friction force $q(x)$, and can be represented by maximum shearing stress or by Mises equivalent stress [5]. Here, only the latter stress is considered.

2 FATIGUE CRACK PROPAGATION DUE TO CONTACT LOADING

The developed model takes into account the short crack growth theory. The modelling of such crack growth should take into account the successive blocking of the plastic zone by slip barriers, e.g. grain boundaries, and subsequent initiation of the slip band in the following grain. This implies the discontinuous character of the crack growth process, which plays a fundamental role in the developed model. In each grain, the crack growth rate decreases as the crack approaches the grain boundary. However, at the moment when the stress concentration ahead of the crack is able to initiate the slip band in the next grain, the crack growth rate increases. The initial period of short crack growth is characterised by large variations in

fazi širjenja kratkih razpok opazna precejšnja nihanja parametra $n=a/c$, kjer sta a - polovična dolžina razpoka in c - polovična dolžina razpoke in plastične cone pred vrhom razpoke, ki se razteza do meje sosednjega kristalnega zrna (sl. 5). Ko parameter n doseže kritično vrednost $n=n_c$ se pojavi tudi dejanski prehod plastične cone v naslednje kristalno zrno.

the parameter $n=a/c$, where a is the half crack length, and c is the half crack length together with the length of plastic zone extension ahead of the crack, which always extends to the grain boundary (Fig. 5). When the parameter n reaches the critical value $n=n_c$ the plastic zone is actually extended to the following grain.



V prispevku je za določitev obremenitvenih ciklov N za raztok vzdolj drsnih ravnin uporabljen Gibbsov model, ki je vključuje akumulirano energijo dislokacij.

Predloženi model temelji na modificiranem modelu BSC (Bilby, Cottrell in Swinden [8]) širjenja kratkih razpok, v katerem je hitrost širjenja razpoke da/dN proporcionalna plastičnemu pomiku vrha razpoka $\Delta\delta_{pl}$ [9]:

$$\frac{da}{dN} = C_o (\Delta\delta_{pl})^{m_o} \quad (5),$$

kjer sta C_o in m_o materialni konstanti, ki ju določimo eksperimentalno. Z vidika numeričnih preračunov je primerno izraziti plastični pomik vrha razpoka $\Delta\delta_{pl}$ s faktorjem intenzivnosti napetosti pri utrujenosti obremenitvi ΔK . To odvisnost sta podala Navarro in Rios v obliki [10]:

$$\Delta\delta_{pl} = \frac{2\kappa}{G\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{1-n^2}}{n} \cdot \Delta K \cdot \sqrt{a} \quad (6),$$

kjer sta G - strižni modul in $\kappa=1$ ali $(1-\nu)$ v odvisnosti od tega, če upoštevamo vijačno ali robno dislokacijo, ν je Poissonovo število. Kritični parameter n_c je podan z enačbo [10]:

$$n_c = \cos \left[\frac{\Delta K}{2\sigma_y} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{c \cdot n_c}} \cdot \left(1 - \frac{K_{th}}{\Delta K} \sqrt{n_c} \right) \right] \quad (7),$$

The developed model is based on the modified BCS model (Bilby, Cottrell and Swinden [8]) of short crack growth, where the crack growth rate da/dN is proportional to the plastic displacement at the crack tip $\Delta\delta_{pl}$ [9]:

in which C_o and m_o are material constants that can be determined experimentally. However, in view of the numerical simulation, it is beneficial to express the plastic displacement $\Delta\delta_{pl}$ in terms of the stress intensity factor ΔK . This relationship has been provided by Navarro and Rios [10] in the following form:

where G is the shear modulus, and $\kappa=1$ or $(1-\nu)$, depending on whether screw or edge dislocations are being considered, with ν being the Poisson ratio. The critical parameter n_c is given by [10]

kjer sta σ_y - meja plastičnosti in K_{th} - mejni faktor intenzivnosti napetosti. Enačbo (7) lahko rešimo iterativno z Newtonovo metodo v treh ali štirih korakih, če vzamemo $n_c=1$ kot začetno vrednost.

Če imamo znano funkcionalno odvisnost $\Delta K=f(a)$, lahko določimo potrebno število obremenitvenih ciklov za razširitev kratke razpoke od začetne dolžine a_0 do poljubne dolžine a po naslednjem postopku:

1) Število kristalnih zrn z , pravokotno na razpoko, izračunamo z delitvijo dolžine razpoke a s premerom kristalnega zrna D ; $z=a/D$ (sl. 6).

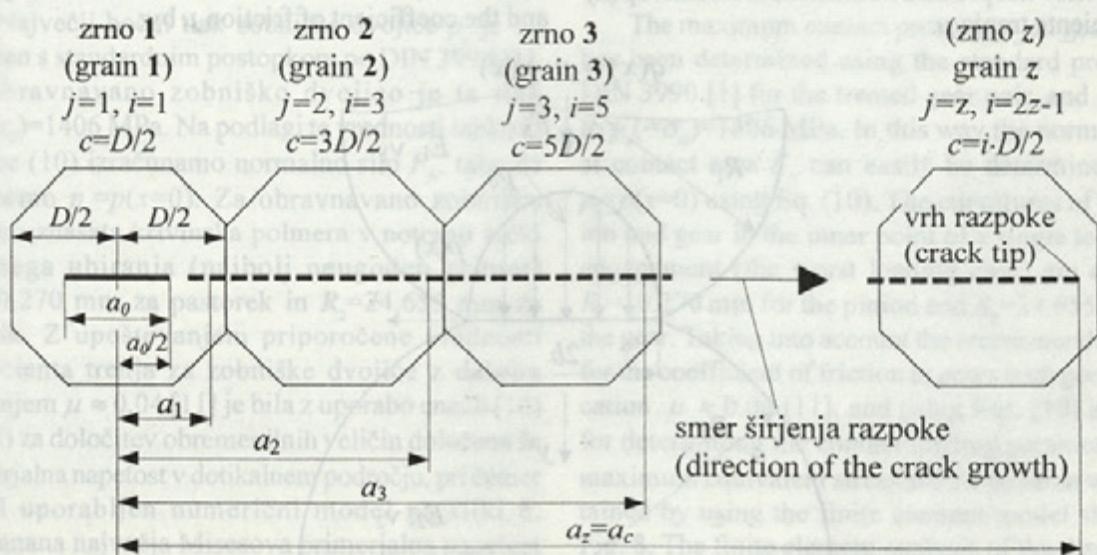
2) Potrebno število obremenitvenih ciklov za razširitev razpoke skozi vsako posamezno kristalno zrno določimo z integracijo enačbe (5):

$$(11) \quad N_j = \int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{da}{C_o(\Delta\delta_{pl})^{m_o}} ; \quad j = 1, 2, 3, \dots, z \quad (8),$$

kjer določimo integracijski meji a_{j-1} in a_j v posameznem zrnu na podlagi kritičnega parametra n_c . Drsna ravnina se namreč razširi v naslednje kristalno zrno samo v primeru, ko doseže parameter n kritično vrednost $n=n_c$.

3) Skupno število obremenitvenih ciklov določimo s preprostim seštevkom:

$$(11) \quad N_f = \sum_{j=1}^z N_j ; \quad j = 1, 2, 3, \dots, z \quad (9).$$



Sl. 6. Shematski prikaz širjenja kratke razpoke

Fig. 6. Schematic representation of short crack propagation

in which σ_y is the yield stress and K_{th} is the threshold stress intensity factor. This equation can be solved iteratively by Newton's method in three or four iterations by taking $n_c=1$ as the initial value.

When the relationship $\Delta K=f(a)$ is known, the number of stress cycles required for the short crack propagation from the initial crack length a_0 to any chosen crack length a can be determined in the following way:

1) The number of grains z transversed by the crack is calculated by dividing the crack length a by the typical grain diameter D , i.e. $z=a/D$ (Fig. 6).

2) The number of stress cycles required for a crack to propagate through each grain is obtained by the integration of Eq. (5)

where integration limits a_{j-1} and a_j are determined in each grain on the basis of a critical parameter n_c ,

since the plastic zone extends to the next grain only when the parameter n in a grain reaches the critical value $n=n_c$.

3) The corresponding total number of stress cycles is then calculated by a simple addition

3 SIMULIRANJE DOTIKALNIH PROBLEMOV NA ZOBNIKIH

Da bi laže upoštevali parametre dotika dveh zobnih bokov, je pri numeričnih analizah koristno nadomestiti zobniško dvojico z nadomestnim modelom dveh valjev (sl. 7). Nadomestna valja imata enaka polmera kakor sta krvinska polmera zobnih bokov v opazovani točki na ubirnici. Po tej predpostavki je mogoče pri obravnavi dotika dveh zobnih bokov uporabiti Hertzovo teorijo, pri kateri je normalna obremenitev površin v dotiku podana z naslednjo analitično enačbo [6]:

$$p(x) = \frac{2F_N}{\pi b^2} \sqrt{b^2 - x^2} \quad (10),$$

kjer pomenita: F_N - normalno silo na enoto dolžine valjev (širine zoba) in b - polovično širino dotikalne ploskve, ki je podana z enačbo [6]:

$$b = \sqrt{\frac{8F_N R^*}{\pi E^*}} \quad (11),$$

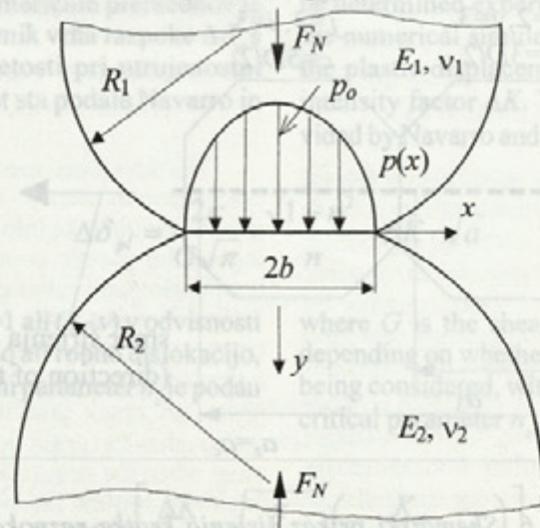
kjer sta R^* - nadomestni polmer in E^* - nadomestni modul elastičnosti po enačbah:

$$E^* = \frac{2E_1 E_2}{E_2(1-v_1^2) + E_1(1-v_2^2)} \quad (12),$$

$$R^* = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (13).$$

Z upoštevanjem Coulombovega zakona trenja lahko določimo torzo obremenitev $q(x)$ zaradi drsenja zobnih bokov kot produkt normalne obremenitve $p(x)$ in koeficienteja trenja μ :

$$q(x) = \mu \cdot p(x) \quad (14).$$



Sl. 7. Nadomestni model dveh valjev
Fig. 7. Equivalent model of two cylinders

3 SIMULATION OF CONTACT PROBLEMS IN GEARS

In order to make it easier to study gear contact parameters in numerical computations it is most useful to replace the complicated gear pair geometry with an equivalent two cylinder model (Fig. 7). The equivalent cylinders have radii which are the same as the curvature radii of gear teeth flanks at any chosen point on the engagement line. This enables the use of the Hertz contact theory, where the distribution of contact pressure in the contact area can be analytically determined by [6]:

in which F_N is the normal force per unit length of equivalent cylinders (gear width) and b is the half-width of the contact area, which is given as [6]:

where R^* is the equivalent radius, and E^* is the equivalent Young's modulus defined as

Utilising the Coulomb friction law, the tangential loading $q(x)$ due to sliding of gear teeth flanks can be easily determined from the normal loading $p(x)$, and the coefficient of friction μ by:

Nad 4 PRAKTIČNI PRIMER

Predstavljeni model je bil uporabljen za določitev odpornosti proti jamičenju zobnih bokov valjaste zobiške dvojice, na kateri so bili opravljeni tudi testni preizkusi. Material zobnikov je bilo jeklo za poboljšanje AISI 4130 (0,43 %C, 0,22 %Si, 0,59 %Mn, 1,04 %Cr, 0,17 %Mo), vrtilni moment pa je znašal $T=183,4 \text{ Nm}$. Druge podatke zobiške dvojice navaja preglednica 1.

Preglednica 1: Osnovni podatki valjaste zobiške dvojice
Table 1: Basic data of a spur gear pair

Veličina (Parameter)	Pastorek (Pinion)	Zobnik (Gear)
Normalni modul (Normal module)	$m_n = 4,5 \text{ mm}$	
Število zob (Number of teeth)	$z_1 = 16$	$z_2 = 24$
Ubirni kot (Pressure angle)		$\alpha_n = 20^\circ$
Koeficient profilne premaknitve (Coefficient of profile displacement)	$x_1 = 0,182$	$x_2 = 0,171$
Medosje (Centre distance)	$e = 91,5 \text{ mm}$	
Širina zoba (Tooth width)	$B_1=B_2 = 14 \text{ mm}$	
Material zobnikov (Gear material)	- meja plastičnosti (yield stress): $\sigma_y \approx 900 \text{ MPa}$	
AISI 4130	- površinska trdota (surface hardness): $\approx 55 \text{ HRc}$	
	- razvezitveni faktor intenzivnosti napetosti (threshold stress intensity factor): $K_{th}=269 \text{ MPa} \sqrt{\text{mm}}$	
	- velikost zrna (grain size): $D=0,05 \text{ mm}$	

4.1 Numerična določitev dobe trajanja zobnih bokov

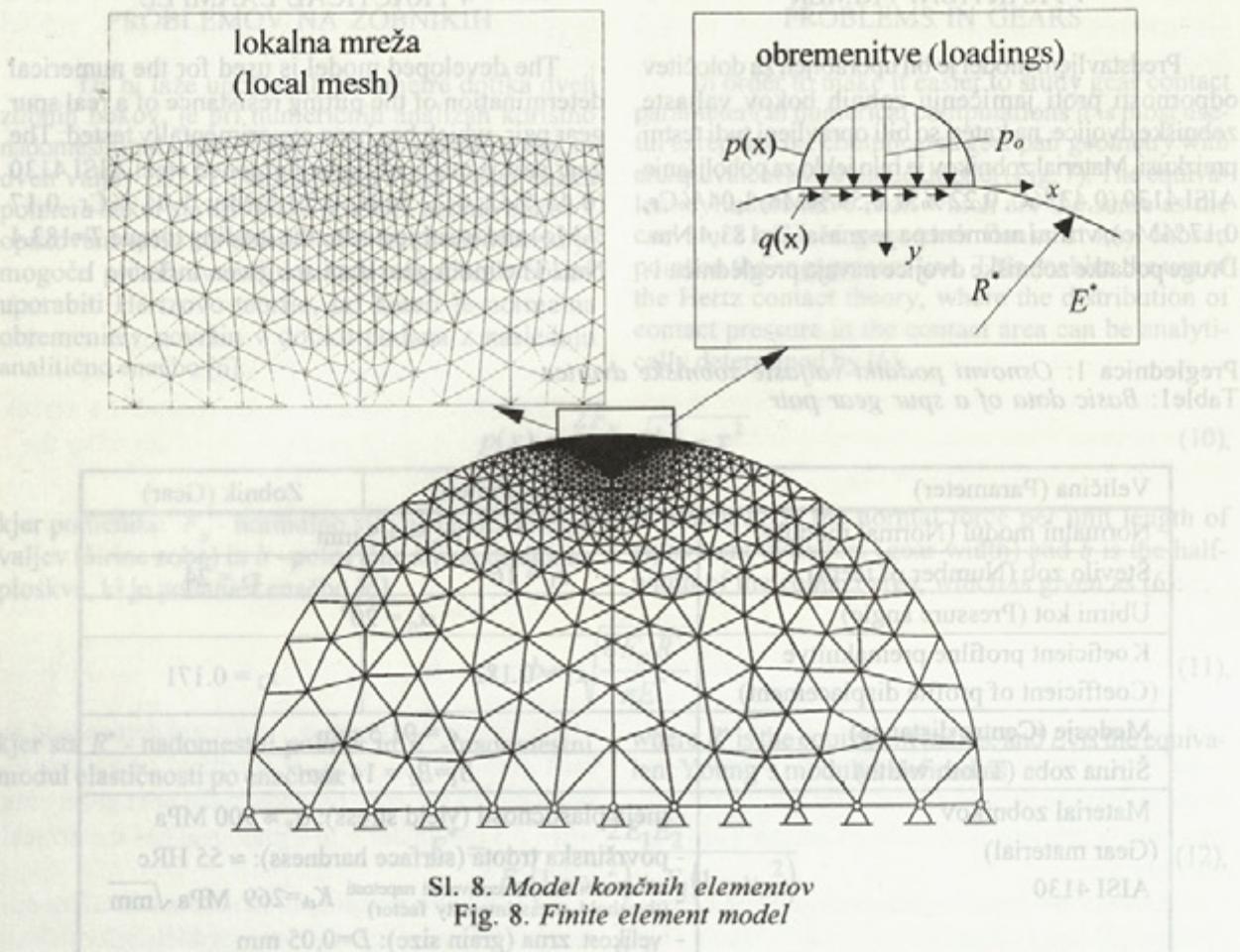
Največji bočni tlak zobiške dvojice p_o je bil določen s standardnim postopkom po DIN 3990 [1]. Za obravnavano zobiško dvojico je ta tlak $p_o = \sigma_H = 1406 \text{ MPa}$. Na podlagi te vrednosti lahko iz enačbe (10) izračunamo normalno silo F_N , tako da vzamemo $p_o = p(x=0)$. Za obravnavano zobiško dvojico znašata krivinska polmera v notranji točki enojnega ubiranja (najbolj neugoden primer) $R_1=10,270 \text{ mm}$ za pastorek in $R_2=24,655 \text{ mm}$ za zobnik. Z upoštevanjem priporočene vrednosti koeficiente trenja za zobiške dvojice z dobrim mazanjem $\mu \approx 0,04$ [11] je bila z uporabo enačb (10) in (14) za določitev obremenilnih veličin določena še primerjalna napetost v dotikalnem področju, pri čemer je bil uporabljen numerični model na sliki 8. Izračunana največja Misesova primerjalna napetost v dotikalnem področju in njena lega znašata $(\sigma_{eq})_{max} = 798 \text{ MPa}$ in $H=0,126 \text{ mm}$ pod dotikalno površino [12].

4 PRACTICAL EXAMPLE

The developed model is used for the numerical determination of the pitting resistance of a real spur gear pair, which has been experimentally tested. The gear pair is made of flame hardened steel AISI 4130 (0.43 %C, 0.22 %Si, 0.59 %Mn, 1.04 %Cr, 0.17 %Mo) and is subjected to the loading torque $T=183.4 \text{ Nm}$. The main gear data are given in Table 1.

4.1 Numerical determination of the service life of gear teeth flanks

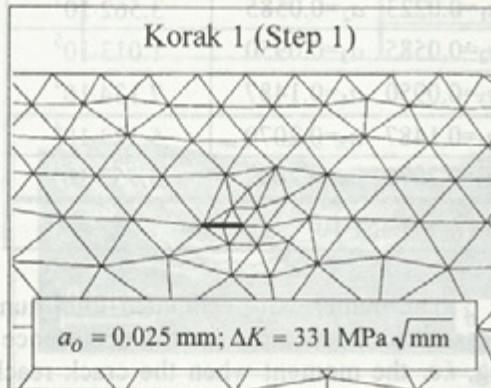
The maximum contact pressure p_o on gear flanks has been determined using the standard procedure DIN 3990 [1] for the treated gear pair, and is equal to $p_o = \sigma_H = 1406 \text{ MPa}$. In this way the normal force at contact area F_N can easily be determined from $p_o = p(x=0)$ using Eq. (10). The curvatures of the pinion and gear in the inner point of a single tooth pair engagement (the worst loading case) are equal to $R_1=10.270 \text{ mm}$ for the pinion and $R_2=24.655 \text{ mm}$ for the gear. Taking into account the recommended value for the coefficient of friction in gears with good lubrication $\mu \approx 0.04$ [11], and using Eqs. (10) and (14) for determining the contact loading parameters, the maximum equivalent stress and its position were obtained by using the finite element model shown in Fig. 8. The finite element analysis of the discretised model gave the value of the maximum equivalent Mises stress $(\sigma_{eq})_{max} = 798 \text{ MPa}$ at depth $H=0.126 \text{ mm}$ under the contact surface [12].



V modelu predpostavimo, da pride do nastanka utrujenostne razpoke v sredini kristalnega zrna na mestu največje primerjalne napetosti, to je v globini $H=0,126$ mm pod dotikalno površino. Potrebno število obremenitvenih ciklov za nastanek razpoke določimo po enačbi (4), pri čemer upoštevamo izračunano največjo primerjalno napetost ($\sigma_{eq,max}$) = 798 MPa kot deluječe amplitudno napetost $\Delta\tau$ v kristalnem zrnu. Kritična stržna napetost materiala τ_f je odpornost materiala proti gibanju dislokacij in je za kovine enaka $\tau_f \approx 25$ MPa [5] in [7]. Dolžina drsne ravnine $2l$ je enaka premeru kristalnega zrna ($2l=D$). Povprečen premer zrna $D \approx 50$ μm je bil določen s poprejšnjimi metalografskimi raziskavami materiala [12]. Širina drsne ravnine h je značilna lastnost mikrostrukture materiala in znaša za kovinske materiale $h \approx 0,3$ nm. Za obravnavani material in z upoštevanjem majhnih plastičnih deformacij lahko za koeficient nepovračljivosti dislokacij predpostavimo vrednosti $f=10^{-4}$ do 10^{-3} , medtem ko lahko za površinsko energijo razpoke vzamemo $\gamma=1$ do 10 N/m [5], [7]. Z upoštevanjem pravkar podanih vrednosti znaša potrebno število obremenitvenih N_o za nastanek utrujenostne razpoke dolžine $a_o=0,025$ mm po enačbi (4) $N_o = 3 \times 10^3$ do 3×10^5 ciklov.

In the model, it is assumed that the crack is initiated in the middle of the grain positioned at the point of maximum equivalent stress computed above, i.e. at depth $H=0.126$ mm under the contact surface. The number of stress cycles N_o required for the crack initiation can then be determined by Eq. (4), where the computed maximum equivalent stress ($\sigma_{eq,max}$) = 798 MPa is used as the applied stress amplitude $\Delta\tau$ to the grain. The maximum shear stress τ_f is material resistance to the motion of dislocations and, for metals is equal to $\tau_f \approx 25$ MPa [5] and [7]. The dislocation pileup length $2l$ can be equalled to the grain diameter ($2l=D$), where the average value of the grain diameter $D \approx 50$ mm has been previously determined [12]. The width of the slip band h is a typical parameter of the material microstructure, and for metals assumes the value of $h \approx 0.3$ nm. For the treated material with relatively small plastic strain amplitudes, the irreversibility factor is taken to be in the range $f=10^{-4}$ to 10^{-3} , and the crack surface energy to be in the range $\gamma=1$ to 10 N/m [5], [7]. Using this data set the number of stress cycles N_o required for the crack initiation of length $a_o=0.025$ mm is, according to Eq. (4), determined to be in the range $N_o = 3 \times 10^3$ to 3×10^5 cycles.

Nadomestni model na sliki 8 je bil uporabljen tudi za numerično analizo širjenja razpoke. Predpostavljena začetna razpoka dolžine a_0 v prvem zrnu je v modelu postavljena na mesto največje primerjalne napetosti na globini $H=0,126$ mm pod dotikalno površino. Slika 9 (korak 1) prikazuje lokalno mrežo končnih elementov okrog začetne razpoke, pri čemer so okrog razpoke uporabljeni posebni lomni končni elementi. Pri numerični analizi širjenja razpoke je bila uporabljeni metoda VCE [13]. S to metodo izračunan faktor intenzivnosti napetosti je zelo majhen na začetku, vendar se pozneje povečuje s širjenjem razpoke v smeri torne obremenitve v dotikalnem področju. Ko se razpoka približa dotikalni površini (sl. 9, korak 11), je vrednost faktorja intenzivnosti napetosti že mnogo večja kakor na začetku, vendar še vedno manjša od lomne žilavosti materiala zobnikov ($K_{lc} = 2620$ MPa $\sqrt{\text{mm}}$ [14]). Nadaljnje numerične analize so pokazale, da faktor intenzivnosti napetosti v drugem vrhu razpoke (levo) preseže lomno žilavost K_{lc} , brž ko razpoka doseže dotikalno površino. Na podlagi te ugotovitve sklepamo, da lahko dolžino razpoke $a=0,3$ mm, ko ta doseže dotikalno površino, v nadaljevanju obravnavamo kot kritično dolžino a_c .



Sl. 9. Numerično simuliranje širjenja utrujenostne razpoke

Fig. 9. Numerical simulation of fatigue crack propagation

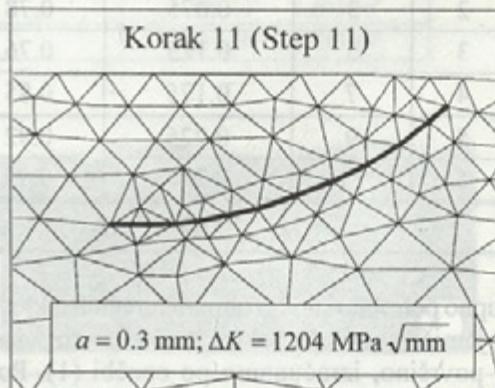
Na podlagi dobljenih numeričnih rezultatov lahko po metodi najmanjših kvadratov določimo funkcionalno odvisnost med faktorjem intenzivnosti napetosti ΔK in dolžino razpoke a , ki je za obravnavani primer enaka:

$$\Delta K = 257,67 + 2907,78a + 827,05a^2 \quad (15)$$

Glede na povprečno velikost kristalnega zrna $D=0,05$ mm in izračunano kritično dolžino razpoke $a_c=0,3$ mm, določimo število vseh kristalnih zrn v smeri rasti razpoke; $z=a/D=6$. Z združitvijo enačb (6) in (15) lahko potem izrazimo plastični pomik vrha razpoke $\Delta\delta_{pl}$ kot funkcijo dolžine razpoke a v obliki:

$$\Delta\delta_{pl} = \frac{2(1-\nu)}{G\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{a}} \cdot \Delta K \quad (16)$$

An equivalent model shown in Fig. 8 is also used for numerical simulations of fatigue crack propagation. The assumed initial crack of length a_0 in the first grain is positioned at the point of the maximum equivalent stress at depth $H=0.126$ mm under the contact surface. The local finite element discretisation around the initial crack is shown in Fig. 9 (step 1), where special fracture finite elements are used around the crack tip. During the finite element analysis using the VCE method [13], the computed stress intensity factor is very small at first but later increases as the crack propagates through the material in the direction of the tangential contact loading. When the crack approaches the contact surface (Fig. 9, step 11), the value of the stress intensity factor is much higher, although still lower than the fracture toughness of the gear material ($K_{lc} = 2620$ MPa $\sqrt{\text{mm}}$ [14]). Numerical simulations have shown that at the moment when the crack reaches the contact surface, the stress intensity factor in the other crack tip (left) exceeds the critical value K_{lc} . This implies that when the crack reaches the contact surface the corresponding crack length $a=0.3$ mm can be taken as the critical crack length a_c .



The functional relationship between the stress intensity factor ΔK and the crack length a can then be determined on the basis of the discrete numerical results by using the least square method, and is found to be equal to:

$$\Delta K = 257,67 + 2907,78a + 827,05a^2 \quad (15)$$

Since the average grain diameter is equal to $D=0.05$ mm and the computed critical crack length equals $a_c=0.3$ mm, the number of grains transversed by the crack is then $z=a/D=6$. By combining Eqs. (6) and (15) the crack tip plastic displacement $\Delta\delta_{pl}$ can be expressed as a function of the crack length a

kjer so: $G=8\times10^4$ MPa strižni modul, $\nu=0,3$ Poissonovo število in $c=iD/2$. Z vstavljivo enačbo (16) v enačbo (8) lahko z upoštevanjem eksperimentalno določenih materialnih konstant $C_o=120,57$ in $m_o=3,069$ [14] izračunamo potrebno število obremenitvenih ciklov za razširitev razpoke skozi vseh šest kristalnih zrn:

$$N_f = \int_{\frac{a_0}{2}}^{a_1} \frac{da}{C_o (\Delta \delta_{pl})^{m_o}} + \sum_{j=2}^{z=6} \left(\int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{da}{C_o (\Delta \delta_{pl})^{m_o}} \right)$$

kjer sta integracijski meji a_{j-1} in a_j v posameznem kristalnem zrnu določeni na podlagi kritičnega parametra n_c , ki ga določimo poprej po enačbi (7) za vseh šest zrn. Rezultati širjenja utrujenostne razpoke za vseh šest zrn so razvidni iz preglednice 2.

Preglednica 2: Rezultati širjenja kratke razpoke skozi kristalna zrna
Table 2: Results of short crack growth across crystal grains

zrno (grain) <i>j</i>	indeks (index) <i>i</i>	<i>c</i> mm	<i>n_c</i>	<i>a_{j-1}; a_j</i> mm	<i>N_f</i>
1	1	0.025	0.89	$a_0/2=0.0125$ $a_1=0.223$	$2.831 \cdot 10^6$
2	3	0.075	0.78	$a_1=0.223$ $a_2=0.0585$	$3.562 \cdot 10^5$
3	5	0.125	0.76	$a_2=0.0585$ $a_3=0.0950$	$1.013 \cdot 10^5$
4	7	0.175	0.85	$a_3=0.0950$ $a_4=0.1487$	$7.134 \cdot 10^4$
5	9	0.225	0.92	$a_4=0.1487$ $a_5=0.2070$	$5.373 \cdot 10^4$
6	11	0.275	0.95	$a_5=0.2070$ $a_6=0.2612$	$3.757 \cdot 10^4$
$N_f=N_1+N_2+N_3+N_4+N_5+N_6 = 3.451 \cdot 10^6$					

Skupno potrebno število obremenitvenih ciklov N za pojav jamičenja zobnih bokov, ko doseže razpoka dotikalno površino, izračunamo po enačbi (1). Po numeričnih rezultatih dobljeno število ciklov znaša: $N=N_o+N_f = (3 \times 10^3 \text{ do } 3 \times 10^5) + 3,451 \times 10^6 = 3,454 \times 10^6 \text{ do } 3,751 \times 10^6$ obremenitvenih ciklov.

4.2 Preizkusi

Preizkusi na testni valjasti zobniški dvojici so bili izvedeni na preizkusni napravi FZG [15] v standardnih razmerah in temperaturno nadzorovanega mazanja. Zobniki so bili obremenjeni z enakim vrtilnim momentom kakor pri preračunih in vrtilno frekvenco pastorka $n_1=2175 \text{ min}^{-1}$. Izvedeni so bili štirje preizkusi na enakih zobniških dvojicah, vsi z novim mazivom istega tipa (INA-EPOL SP 220 s kinematično viskoznostjo $\nu_{40}=2,2 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ in $\nu_{100}=1,79 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ [12]). Med preizkusom so bili v določenih časovnih presledkih izvedeni pregledi zobnih bokov glede na jamičenje. Preizkus smo končali, ko so bile ugotovljene jamice na površini zobnih bokov velikosti okrog 0,5 mm. Hkrati je bilo s tem določen pripadajoče število obremenitvenih ciklov. Rezultati preizkusov so bili potem statistično obdelani (pregl.3)[12].

where $G=8\times10^4$ MPa is the shear modulus, $\nu=0.3$ is the Poisson's ratio and $c=iD/2$. Using Eq. (16) and Eq. (8), and taking the experimentally determined material constants $C_o=120.57$ and $m_o=3.069$ [14], the number of stress cycles required for crack propagation through all six grains can then be determined by:

$$N_f = \int_{\frac{a_0}{2}}^{a_1} \frac{da}{C_o (\Delta \delta_{pl})^{m_o}} + \sum_{j=2}^{z=6} \left(\int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{da}{C_o (\Delta \delta_{pl})^{m_o}} \right) \quad (17)$$

where the integration limits a_{j-1} and a_j are dependent in each grain on the critical parameter n_c , which was determined by solving the Eq. (7) for all six grains. The numerical results of crack growth simulation through all six grains are summarised in Table 2.

The numerically estimated total number of stress cycles N required for the occurrence of pitting, i.e. the moment when the crack reaches the surface, can then be determined according to Eq. (1) as $N=N_o+N_f = (3 \times 10^3 \text{ to } 3 \times 10^5) + 3.451 \times 10^6 = 3.454 \times 10^6 \text{ to } 3.751 \times 10^6$ stress cycles.

4.2 Experimental testing

Experimental testing of the spur gear pair was performed on the FZG-test rig [15]. The standard lubrication is temperature controlled dip lubrication. The gears were subjected to the operational loading torque, and the number of revolutions of the pinion $n_1=2175 \text{ min}^{-1}$. Four test runs were performed on four equal gear pairs, always with a new lubricant of the same type (INA-EPOL SP 220 with kinematic viscosity $\nu_{40}=2,2 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ and $\nu_{100}=1,79 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ [12]). The test runs were interrupted at certain load cycle intervals and the gears were inspected for any occurrence of pitting on gear teeth flanks. When pits of the size about 0.5 mm were observed on any tooth flank, the test run was stopped and the corresponding number of loading cycles was recorded. The experimental results were then subjected to statistical analysis. The results are shown in Table 3 [12].

4.3 Primerjava numeričnih in eksperimentalnih rezultatov

Če primerjamo numerične rezultate za potrebo število obremenitvenih ciklov za pojav jamičenja zobnih bokov $N=3,454 \times 10^6$ do $3,751 \times 10^6$ obremenitvenih ciklov, s statistično obdelanimi eksperimentalnimi rezultati $N=2,629 \times 10^6$ do $3,765 \times 10^6$ obremenitvenih ciklov za 90% verjetnost (gl. preglednico 3), lahko ugotovimo, da se ti kar dobro ujemajo. Tudi primerjava velikosti in oblike jamic na površini zobnih bokov kaže dobro ujemanje, kar lahko ugotovimo s slike 10.

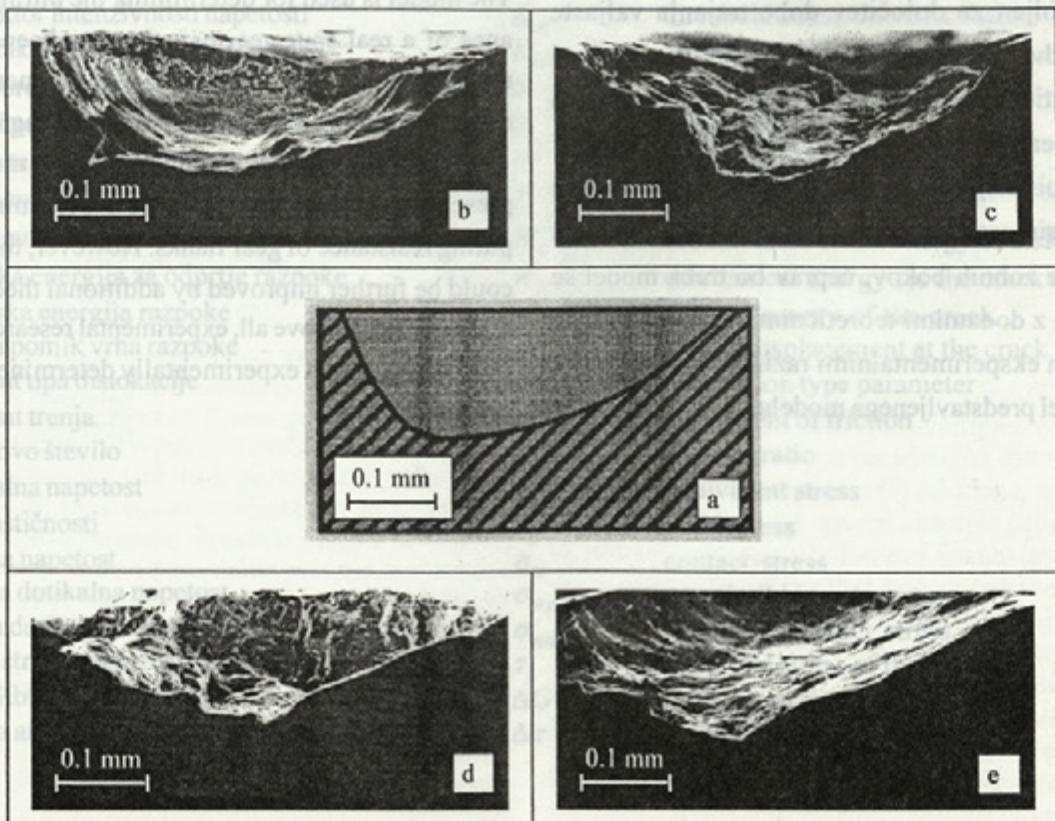
Preglednica 3: Primerjava numeričnih in eksperimentalnih rezultatov

Table 3: Comparison of numerical and experimental results

4.3 Comparison of numerical and experimental results

Comparing the numerically estimated total number of stress cycles required for the occurrence of pitting, $N=3.454 \times 10^6$ to 3.751×10^6 stress cycles, with the statistical representation of the experimentally determined number of stress cycles, e.g. $N=2.629 \times 10^6$ to 3.765×10^6 stress cycles with 90% probability (see Table 3), one can observe a reasonable concordance of results. The comparison of pit shapes on the contact surfaces is even more convincing, see Fig. 10.

Numerični model (Numerical model)		Preizkus (Experiment)	
N	Verjetnost (Probability) $P(N)$	N	
$3.454 \cdot 10^6 - 3.751 \cdot 10^6$	0.5	$2.900 \cdot 10^6 - 3.494 \cdot 10^6$	
	0.7	$2.771 \cdot 10^6 - 3.622 \cdot 10^6$	
	0.9	$2.629 \cdot 10^6 - 3.765 \cdot 10^6$	
	0.95	$2.590 \cdot 10^6 - 3.803 \cdot 10^6$	
	0.99	$2.558 \cdot 10^6 - 3.835 \cdot 10^6$	



Sl. 10. Primerjava numerično a) in eksperimentalno b), c), d), e) določenih oblik jamic na dotikalnih površinah

Fig. 10. Comparison of numerically a) and experimentally b), c), d), e) obtained pit shapes on the contact surfaces

5 SKLEPI

Iz napisanega lahko sklenemo, da je predstavljen model primeren za preračun zobnikov glede na jamičenje zobnih bokov, čeprav bo treba model še dopolniti z dodatnimi teoretičnimi, numeričnimi in predvsem eksperimentalnimi raziskavami, saj so te klinični del predstavljenega modela.

5 SKLFPI

V tem prispevku je predstavljen nov model za preračun zobnikov glede na jamičenje zobnih bokov. Model obravnava proces utrujanja zobnih bokov in vključuje pogoje nastanka in širjenja utrujenostne razpoke v dotikalnem področju zobnih bokov. Napetostno polje v dotikalnem področju in odvisnost faktorja intenzivnosti napetosti od dolžine razpoke sta določena z metodo končnih elementov, pri čemer je za določitev funkcijске odvisnosti med faktorjem intenzivnosti napetosti in dolžino razpoke uporabljena metoda navideznega podaljška razpoke. Iz rezultatov numerične analize in iz materialnih parametrov zobnikov je določena doba trajanja zobnih bokov kot vsota potrebnega števila obremenitvenih ciklov za nastanek razpoke in potrebnega števila obremenitvenih ciklov za razširitev te razpoke od začetne do kritične dolžine, ko razpoka doseže dotikalno površino in povzroči nastanek jamičenja. Predstavljen model je uporabljen za določitev dobe trajanja valjaste zobiške dvojice z ravnimi zobmi, na kateri so opravljeni tudi praktični preizkusi. Primerjava numeričnih in eksperimentalnih rezultatov kaže dobro ujemanje.

Iz napisanega lahko sklenemo, da je predstavljen model primeren za preračun zobnikov glede na jamičenje zobnih bokov, čeprav bo treba model še dopolniti z dodatnimi teoretičnimi, numeričnimi in predvsem eksperimentalnimi raziskavami, saj so te klinični del predstavljenega modela.

5 CONCLUSIONS

A new model for determining the pitting resistance of gear teeth flanks is presented in this paper. The model simulates the fatigue process of gear teeth flanks, *i.e.* it includes the conditions required for crack initiation, and then the simulation of fatigue crack propagation. The stress field in the contact area and dependence of the stress intensity factor on the crack length are determined by the finite element method, where the required functional relationship between the stress intensity factor at the crack tip and the crack length is determined by using the virtual crack extension method. On the basis of numerical results, and with consideration of some particular material parameters, the service life of the gear teeth flanks is then determined from the number of stress cycles required for internal crack initiation and from the number of stress cycles required for a crack to propagate from the initial to the critical crack length, when the crack reaches the surface and pitting occurs. The model is used for determining the pitting resistance of a real spur gear pair that has been experimentally tested. The comparison of the numerical and experimental results shows a reasonable agreement.

It can be concluded, therefore, that the numerical presented model is appropriate for determining the pitting resistance of gear flanks. However, the model could be further improved by additional theoretical, numerical and, above all, experimental research, since it relies mostly on experimentally determined material parameters.

6 POMEN OZNAČB

Analysis of Nonlinear Oscillations with Finite Degrees of Freedom

dolžina razpoke	a	crack length
polovična širina dotikalne ploskve	b	half width of the contact area
dolžina razpoke in plastične cone	c	crack length together with the plastic zone
koefficient nepovračljivosti dislokacij	f	irreversibility factor of dislocations
širina drsne ravnine	h	width of a slip band
polovična dolžina drsne ravnine	l	half length of slip band
normalni modul	m_n	normal module
materialna konstanta	m_o	material constant
koefficient razširitve razpoke	n	crack extension parameter
normalna obremenitev	$p(x)$	normal loading
največji bočni tlak	p_o	maximum contact pressure
torna obremenitev	$q(x)$	friction loading
število zob	z	number of teeth
število kristalnih zrn	z	number of grains
materialna konstanta	C_o	material constant
premer kristalnega zrna	D	crystal grain diameter
modul elastičnosti	E	Young's modulus
nadomestni modul elastičnosti	E'	equivalent Young's modulus
normalna sila na enoto dolžine	F_N	normal force per unit length
strižni modul	G	shear modulus
oddaljenost od dotikalne površine	H	depth under the contact surface
faktor intenzivnosti napetosti	K	stress intensity factor
mejni faktor intenzivnosti napetosti	K_{th}	threshold stress intensity factor
kritični faktor intenzivnosti napetosti	K_c	critical stress intensity factor
število obremenitvenih ciklov	N	number of stress cycles
krivinski polmer	R	curvature radius
nadomestni krivinski polmer	R'	equivalent curvature radius
vrtljni moment	T	torque
akumulirana energija dislokacij	W_1	accumulated strain energy of dislocations
mehanska energija za odprtje razpoke	W_2	mechanical energy for the crack opening
površinska energija razpoke	γ	surface energy of the crack
plastični pomik vrha razpoke	δ_{pl}	plastic displacement at the crack tip
koefficient tipa dislokacije	κ	dislocation type parameter
koefficient trenja	μ	coefficient of friction
Poissonovo število	ν	Poisson ratio
primerjalna napetost	σ_{eq}	equivalent stress
meja plastičnosti	σ_y	yield stress
dotikalna napetost	σ_H	contact stress
dopustna dotikalna napetost	σ_{HP}	permissible contact stress
imenska dotikalna napetost	σ_{HBM}	reference contact stress
kritična strižna napetost materiala	τ_f	frictional stress of the material
prosta Gibbsova energija	ΔG	Gibb's free energy
dejanska amplitudna napetost	$\Delta \tau$	applied stress amplitude

7 LITERATURA 7 REFERENCES

- [1] DIN 3990, Calculation of load capacity of cylindrical gears. German Standard, 1987.
- [2] Weck, M.: Moderne Leistungsgetriebe. Springer Verlag, Berlin, 1992.
- [3] Niemann, G., H.Winter: Maschinenelemente- Band II. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [4] Zhou, R.S., H.S.Cheng, T.Mura: Micropitting in rolling and sliding contact under mixed lubrication. ASME J. Tribology, 111, 1989, 605-613.
- [5] Cheng, W., H.S.Cheng, T.Mura, L.M.Keer: Micromechanics modeling of crack initiation under contact fatigue. ASME J. Tribology, 116, 1994, 2-8.
- [6] Johnson, K. L.: Contact mechanics. Cambridge University Press, 1985.
- [7] Mura, T., Y.Nakasone: A theory of fatigue crack initiation in solids. ASME J. Appl. Mech., 57, 1990, 1-6.
- [8] Bilby, A., A.H. Cottrell, K.H.Swinden: The spread of plastic yield from a notch. Proc. R. Soc. London, A-272, 1963, 304-314.
- [9] Sun, Z., E.R.Rios, K.J.Miller: Modelling small fatigue cracks interacting with grain boundaries. Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct., 14, 1991, 277-291.
- [10] Navarro, A., E.R.Rios: Short and long fatigue crack growth-a unified model. Philosophical Magazine A, 57, 1988, 15-36.
- [11] Winter, H., G.Knauer: Einfluss von Schmierstoff und Betriebstemperatur auf die Grubchentragfahigkeit einsatzgehärteter Zahnräder. Antriebstechnik, 29, 1990, 65-84.
- [12] Glodež, S.: Model utrjanja zobnih bokov z upoštevanjem parametrov lomne mehanike. Doktorska disertacija, Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo, 1995.
- [13] Hellen, T. K.: On the method of virtual crack extensions. Int. J. Numer. Methods Engng, 9, 1975, 187-207.
- [14] Aberšek, B.: Analiza modela širjenja kratkih utrjenostnih razpok na zobe zobnikov. Doktorska disertacija, Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo, 1993.
- [15] DIN 51354, FZG gear test rig- general working principles. German Industrial Standard, 1990.

Naslov avtorjev: doc. dr. Srečko Glodež, dipl. inž.
 prof. dr. Jože Flašker, dipl. inž.
 Univerza v Mariboru
 Fakulteta za strojništvo
 Smetanova 17
 2000 Maribor

Prejeto: 19.2.1997
 Received: 19.2.1997

Authors' Address: Doc. Dr. Srečko Glodež, Dipl. Ing.
 Prof. Dr. Jože Flašker, Dipl. Ing.
 University of Maribor
 Faculty of Mechanical Engineering
 Smetanova 17
 2000 Maribor, Slovenia

Sprejeto: 30.6.1997
 Accepted: 30.6.1997