

STROJNISKI VESTNIK

LETNIK 20

LJUBLJANA, V SEPTEMBRU 1974

ŠTEVILKA 5

UDK 681.3.06:536.22

TEMPEL — program končnih elementov za izračunavanje temperaturnih polj

ANDRO ALUJEVIČ, BEN EYSINK, JOHN HEAD

Postopek končnih elementov je koristno uporaben tudi za toplotno analizo strojnih delov poljubne oblike s predpisanimi temperaturami ali toplotnimi tokovi na robovih. Ta metoda ima odlike glede na druge numerične postopke, pri upoštevanju porazdelitve toplotnih virov, spremenljivosti lastnosti snovi ter pogojev prestopa toplotne na mejah. Podrobno sta v tem članku obdelana primera ravninskih in osnosimetričnih problemov prevoda toplotne v telesih, ki ju rešujemo s trikotnimi stenskimi elementi oziroma svitki. Ta zasnova je obrodila računalniški program TEMPEL za analizo toplotne prevodnosti. Podani so dokazni izračunani primeri v oceno primernosti postopka.

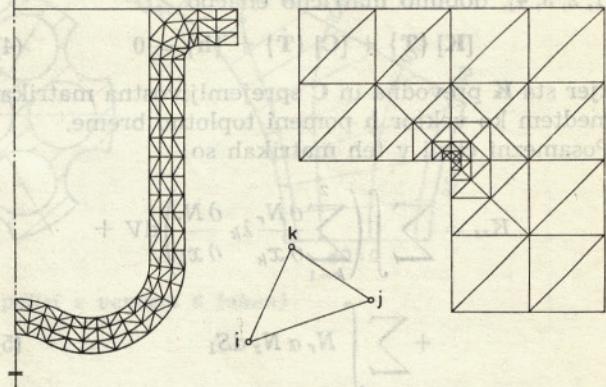
1. UVOD

Prevod toplotne v trdnih telesih je odvisen od temperaturnih razlik, upoštevati pa moramo tudi toplotne vire v sami snovi. Kadar poznamo razpoložitev teh virov in dotoka toplotne na robovih, lahko z metodami nauka o prevajjanju toplotne določimo porazdelitve temperatur v strojnih delih. Sveda je ta opravek težak ali celo jalov, kadar imajo telesa nepravilno obliko. Da bi se izognili težavam, izberemo metodo končnih elementov za obravnavanje zastavljenega problema. Ta tehnika se je sicer najprej udomačila za potrebe mehanike, toda z njenim razvojem in posplošitvami je postala uporabna tudi za druge probleme polj. V tej razpravi je postopek končnih elementov namenjen za določevanje prevajanja toplotne v poljubnih telesih. Obravnavano telo razdelimo na sestav z vozlišči povezanih elementov. Za tak zbor dobimo potem sistem navadnih enačb, če toplotno bilanco telesa izrazimo z uporabo ustreznih variacijskih načel. Kakor izhaja iz osnov variacijskega računa, preide osnovna diferencialna enačba skupaj s svojimi robnimi pogoji v ustrezno funkcijo, ki minimizira ustrezen funkcional iskané temperaturne porazdelitve.

Sam postopek končnih elementov, s katerim se lotevamo reševanja problema prevajanja toplotne, je takšenle:

- razstavitev telesa na mrežo elementov (sl. 1),
- izbira ustrezne temperaturne modela,
- izpeljava matrik lastnosti elementov,
- seštevanje matrik za celotno strukturo,
- razrešitev sistema enačb — določitev iskanih temperatur.

Pri snovanju programa TEMPEL so bili izbrani linearni trikotni končni elementi z vozlišči v ogligli-



Sl. 1. Mreža končnih elementov v ravnini

ščih. Znotraj teh elementov, tako ravninskih kakor vrteninskih, je temperaturni model določen z linearno obliko

$$T = a + b x + c y \quad (1)$$

ki mora zadostiti naslednjim zahtevam

- vsebovati mora konstantne vrednosti temperatur,
- obsegati mora enakomerne gradiante temperatur,
- zagotoviti mora zveznost porazdelitve v elementih in zložnost vrednosti med sosednjimi elementi.

Z upoštevanjem teh kriterijev je bil naš program TEMPEL napisan za raziskovalne potrebe, da bi se izognili nakupu komercialnih programov, ki jih je za drag denar mogoče dobiti na tržišču s tehničnimi dobrinami.

2. PREVOD TOPLOTE Z »2-D« KONČNIMI ELEMENTI

Casovno odvisno prevajanje toplote v trdnih telesih zapišemo s parcialno diferencialno enačbo

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + P = c \dot{T} \quad (2)$$

kjer pomenijo: λ toplotno prevodnost, T temperaturo, P moč toplotnih virov na enoto prostornine, c specifično toploto prostorninske enote. Enačba mora zadostiti danim robnim in začetnim vrednostim.

Oblika izbranega temperaturnega polja v vsakem od končnih elementov celotnega sestava se da izraziti z vrednostmi vozliščnih temperatur

$$T = [N_i N_j N_k] \{T_i T_j T_k\} \quad (3)$$

$$N_{ijk} = (a_{ijk} + b_{ijk} \cdot x + c_{ijk} \cdot y) / 2 A$$

$$A = \frac{1}{2} [x_i \cdot (y_j - y_k) + x_j \cdot (y_k - y_i) + x_k \cdot (y_i - y_j)]$$

$$a_i = x_k y_j - x_j y_k, b_i = y_k - y_j, c_i = x_j - x_k$$

$$a_j = x_i y_k - x_k y_i, b_j = y_i - y_k, c_j = x_k - x_i$$

$$a_k = x_j y_i - x_i y_j, b_k = y_j - y_i, c_k = x_i - x_j$$

Z vsaditvijo tega modela (3) v enačbo (2) lahko s procesom, ki je že dodobra opisan v literaturi [1, 2, 3, 4], dobimo matrično enačbo

$$[\mathbf{K}] \{T\} + [\mathbf{C}] \{\dot{T}\} + \{h\} = 0 \quad (4)$$

kjer sta \mathbf{K} prevodna in \mathbf{C} sprejemljivostna matrika, medtem ko vektor \mathbf{h} pomeni toplotno breme.

Posamezni členi v teh matrikah so

$$K_{rs} = \sum \int \left(\sum_{k=1}^2 \frac{\partial N_r}{\partial x_k} \lambda_k \frac{\partial N_s}{\partial x_k} \right) dV + \sum \int N_r \alpha N_s dS_1 \quad (5)$$

(kjer S_1 pomeni površine s konvektivnim prestopom toplote s koeficientom α)

$$C_{rs} = \sum N_r c N_s dV \quad (6)$$

$$h_r = - \sum N_r P dV + \sum N_r q dS_2 - \sum N_r \alpha \delta T_z dS_1 \quad (7)$$

(kjer S_2 pomeni površine s predpisanim toplotnim tokom q in je T_z okolišna temperatura).

3. USTALJENO STANJE

Enačba (4) se skrči v zapis

$$[\mathbf{K}] \{T\} + \{h\} = 0 \quad (8)$$

kjer je

$$[\mathbf{K}] = \sum \int \mathbf{B}^* \lambda \mathbf{B} dV \quad (9)$$

z matriko

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2 A} \begin{bmatrix} b_i b_j b_k \\ c_i c_j c_k \end{bmatrix} \quad (10)$$

in vektorjem

$$\mathbf{h} = - \int P \mathbf{N}^* dV \quad (11)$$

Če vzamemo, da je toplotna prevodnost nespremenljiva in izotropna in je toplotna moč v posameznih elementih enotna, preideta enačbi (9) in (11) v novo obliko

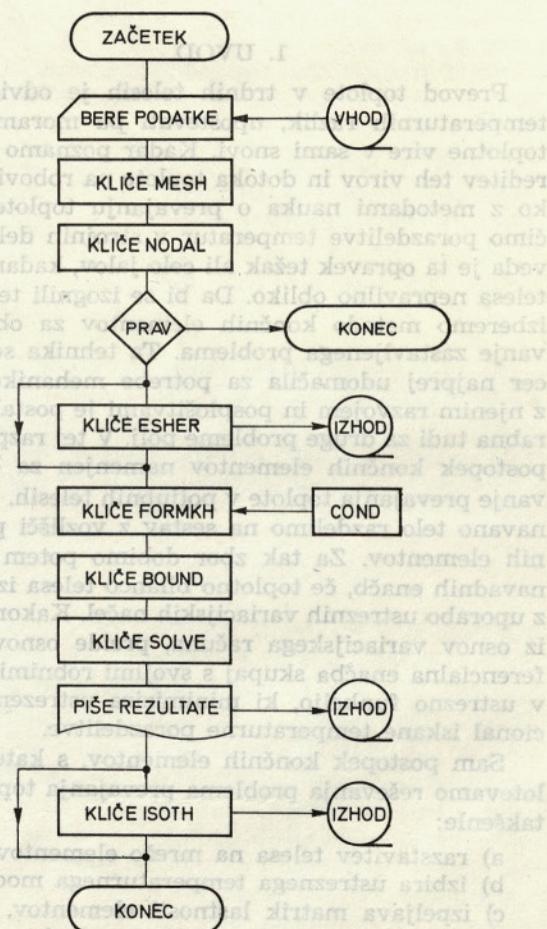
$$\mathbf{K} = \sum \frac{\lambda}{4 A} \begin{bmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ \dots & b_j^2 + c_j^2 & b_j b_k + c_j c_k \\ \dots & \dots & b_k^2 + c_k^2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{h} = - \sum \frac{PA}{3} \{1 1 1\} \quad (13)$$

Za vrteninska telesa moramo zgornji enačbi (12) in (13) pomnožiti z $2 \pi r_o$ (kjer pomeni r_o radij težišč trikotnikov), saj moramo integracijo izvesti po prostornini in zato tudi v obodni smeri $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

4. OPIS PROGRAMA

Za zapis programa TEMPEL smo uporabili jezik FORTRAN IV, predpisani s standardi ANSI, da ga



Sl. 2. Diagram poteka programa TEMPEL
Podprogrami:
MESH — mreža, NODAL — vozišča, ESHER — slika mreže,
FORMKH — matrike, BOUND — robni pogoji, SOLVE — rešitev,
ISOTH — izoterme, COND = prevodnost snovi

bomo lahko uporabili na kateremkoli fortranskem sistemu. Vsebovane sestavine programa so naslednje (glej diagram poteka — slika 2):

MAIN — osnovni del programa,

MESH — podatki o mreži in koordinatah,

NODAL — oštevilčenje vozlišč in elementov,

FORMKH — izračun prevodne matrice K in toplotnih bremen \mathbf{h} ,

BOUND — upoštevanje robnih pogojev,

SOLVE — razrešitev dobljenega sistema enačb,

COND — določitev specifične toplotne prevodnosti v odvisnosti od temperature in starosti snovi (obsevalna doza).

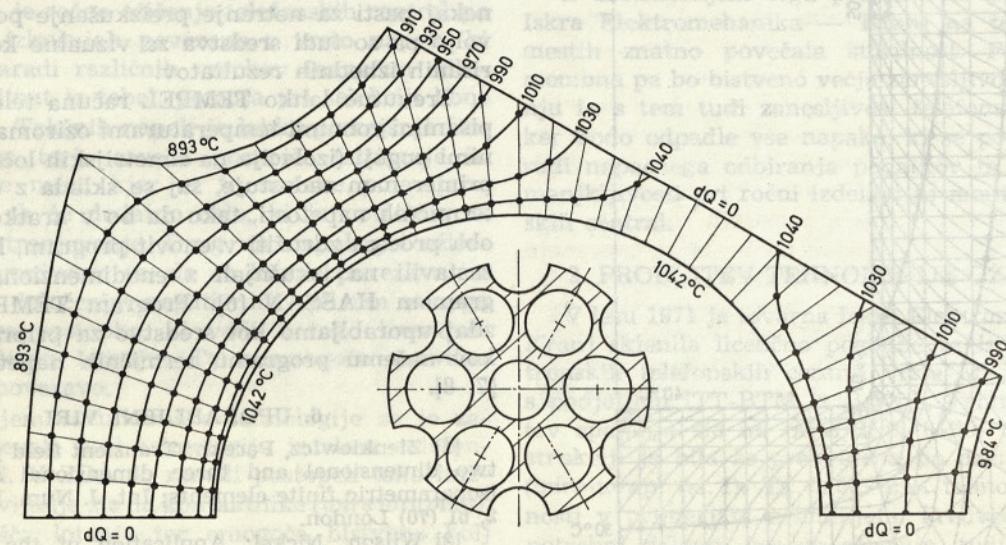
Poleg tega sta na voljo še dva risalna postopka (za vrsto računalnikov CDC 6000):

ESHER — risanje mrež z opremo »Kingmatic«,

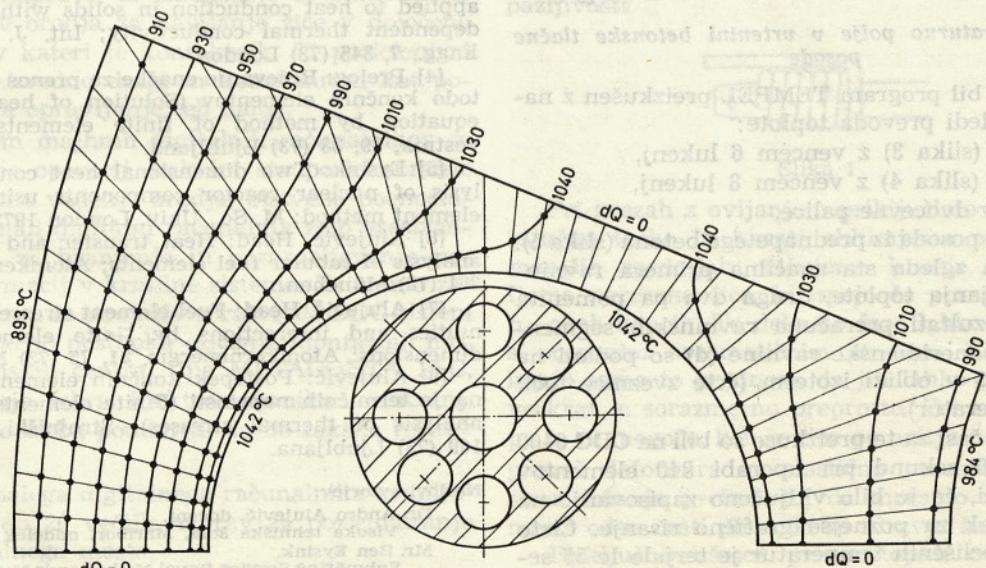
ISOTH — določevanje izoterm s »Kingmatic«.

Od vsega začetka je metoda končnih elementov dajala velike prednosti pri težavnih primerih analize. Priprava podatkov za mreže pa je pri tem najbolj zamudno opravilo in velik del truda je bil vložen za uvedbo pripomočkov pri ustvarjanju mrež in preizkušanju njihove pravilnosti. Za prikaz rezultatov, tj. izračunanih temperatur je prav tako najustreznejše risanje slik z izotermami z risalnikom oziroma z znakovnim tiskom.

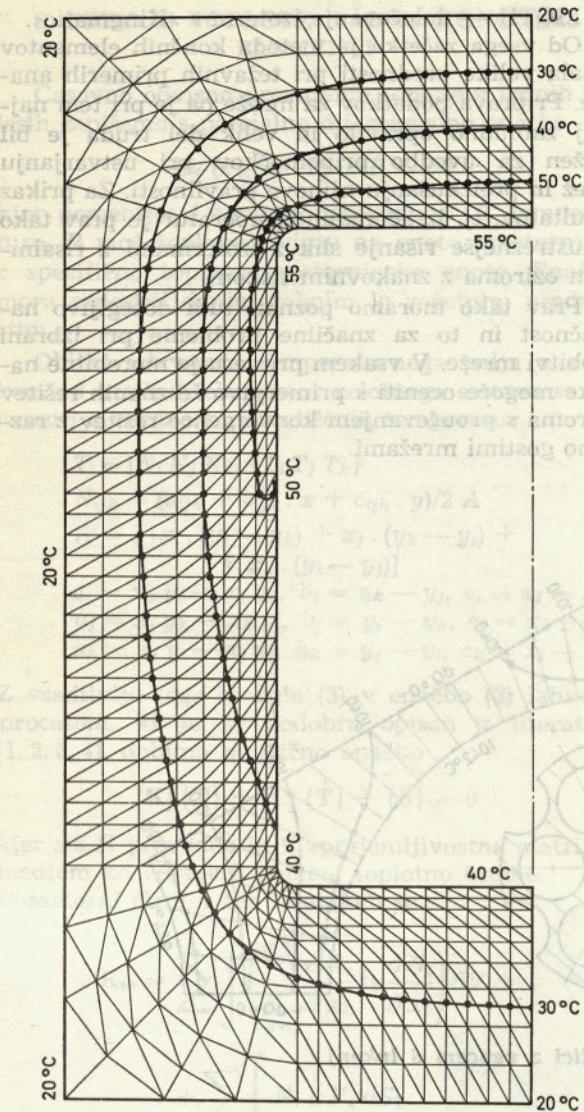
Prav tako moramo poznati tudi dosegljivo natančnost in to za značilne probleme pri izbrani drobitvi mreže. V vsakem primeru je morebitne napake mogoče oceniti s primerjavo že znanih rešitev oziroma s proučevanjem konvergencije rešitev z različno gostimi mrežami.



Sl. 3. Porazdelitev izoterm v palici z vencem 6 luknenj



Sl. 4. Porazdelitev izoterm v palici z vencem 8 luknenj



S1.5. Temperaturno polje v vrtenini betonske tlačne posode

Doslej je bil program TEMPEL preizkušen z naslednjimi zgledi prevoda toplote:

- palica (slika 3) z vencem 6 lukenj,
- palica (slika 4) z vencem 8 lukenj,
- pokrov dvocevne palice,
- tlačna posoda iz prednapetega betona (slika 5).

Prva dva zgleda sta značilna primera ravninskega prevajanja toplote, druga dva pa pomenita vrtenine. Rezultati preračuna ravninskih segmentov (a, b) in meridianske ravnine (d) so podani na slikah 3, 4, 5 v obliki izoterm (črte zveznice točk enakih temperatur).

Računski časi za te preizkuse so bili na CDC 6400 približno 130 sekund pri uporabi 840 elementov s 490 vozlišči, če je bilo vključeno zapisovanje na magnetni trak za poznejše grafično risanje. Čisto računanje vozliščnih temperatur je terjalo le 55 sekund na CDC 6400 (oziroma 5,6 s na CDC 7600). Za račun pa je bilo potrebno 30 000 besed spomina.

5. SKLEP

Obravnavani primeri pojasnjujejo zmožnosti programa TEMPEL [5]. Raba trikotnih končnih elementov omogoča zadostno prilagajanje krivuljnim robovom, prav tako pa tudi zgoščevanje mrež v področjih koncentracij toplotnih tokov in nehomogenosti snovi. S predpisovanjem različnih vrednosti lastnosti snovi v sosednjih elementih — ne da bi se te menjale znotraj posameznih elementov — je dosegljiva ustrezna spremenljivost parametrov po celotni strukturi strojnega dela.

Najbolj zamuden del postopka je proces razdeljevanja telesa na mrežo, ki mora biti podana v obliki brezhibnih vhodnih podatkov. Napake na vhodu morajo biti odpravljene, da ne bi dobili napacnih rezultatov. Program TEMPEL ima vgrajenih nekaj pasti za notranje preizkušanje podatkov, na voljo pa so tudi sredstva za vizualno kontrolo narisanih izhodnih rezultatov.

Trenutno lahko TEMPEL računa telesa s predpisanimi robnimi temperaturami oziroma z adiabatskimi pogoji (izolacija na simetrijskih ločnicah). Tak primer nam zadostuje, saj se sklada z določanjem termičnih napetosti, tako da bo v kratkem mogoče oba procesa združiti v enovit program, ki ga bomo zastavili na izkušnjah z enodimenzionalnim programom HASSAN [6]. Program TEMPEL pa za zdaj uporabljamo kot sredstvo za pripravo podatkov našemu programu termičnih napetosti BREL [7, 8].

6. UPORABLJENI VIRI

[1] Zienkiewicz, Parekh: Transient field problems — two dimensional and three dimensional analysis by isoparametric finite elements; Int. J. Num. Meth. Engg., 2, 61 (70) London.

[2] Wilson, Nickel: Application of the finite element method to heat conduction analysis; Nucl. Engg. Design, 4, 276 (66) Amsterdam.

[3] Aguirre-Ramirez, Oden: Finite element technique applied to heat conduction in solids with temperature dependent thermal conductivity; Int. J. Num. Meth. Engg., 7, 345 (73) London.

[4] Prelog: Reševanje enačbe za prenos toplote z metodo končnih elementov (Solution of heat conduction equation by method of finite elements); Strojniški vestnik, 19, 33 (73) Ljubljana.

[5] Eysink: Two dimensional heat conduction analysis of nuclear reactor components using the finite element method; M. Sc., Univ. London 1973.

[6] Alujević, Head: Heat transfer and stress strain analysis of tubular fuel elements; Atomkernenergie, 20, 261 (72) München.

[7] Alujević, Head: Fuel element stresses at discontinuities and interactions by finite elements in two dimensions; Atomkernenergie, 21, 75 (73) München.

[8] Alujević: Postopek končnih elementov za računanje termičnih napetosti (Finite elements method for analysis of thermal stresses); Strojniški vestnik, 19, 169 (73) Ljubljana.

Naslovni avtorjev:

Dr. Andro Alujević, docent,
Visoka tehniška šola, Maribor, oddelek za strojništvo
Mr. Ben Eysink,
Submarine Service Royal Netherlands Navy, Den Helder
Dr. John Head, Lecturer,
Imperial College of Science and Technology, Mech.
Eng. Dept. University of London, England